Algèbres de Lie : classifications, déformations et rigidité, géométrie différentielle.

Michel GOZE

May 6, 2008

Cours donné à l'ENSET d'Oran en novembre 2006 durant la cinquième Ecole de Géométrie différentielle et Systèmes Dynamiques

Table des Matières

Partie I

Algèbres de Lie : généralités et classifications

1 Algèbres de Lie : définitions, exemples.

1.1 Définition et exemples

Dans tout ce travail, les algèbres de Lie considérées seront complexes. Lorsque nous serons intéressés par le cas réel ou par des algèbres de Lie sur un anneau quelconque, nous le préciserons alors.

Définition 1 *Une algèbre de Lie est un couple* $(\mathfrak{g}, \mu)$ *où* $\mathfrak{g}$ *est un espace vectoriel complexe et* μ *une application bilinéaire*

$$\mu : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

satisfaisant :

$$\mu(X, Y) = -\mu(Y, X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$
$$\mu(X, \mu(Y, Z)) + \mu(Y, \mu(Z, X)) + \mu(Z, \mu(X, Y)) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Cette dernière identité est appelée l'identité de Jacobi. Si $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel de dimension finie n, on dira que $(\mathfrak{g}, \mu)$ est une algèbre de Lie de dimension n. Sinon on dira que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est de dimension infinie. Par soucis de simplification de langage, lorsque cela n'entraine aucune conséquence, on parlera de $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie au lieu du couple $(\mathfrak{g}, \mu)$.

1.2 Exemples

1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie ou non. Si $\mu = 0$, alors $\mathfrak{g} = (V, 0)$ est une algèbre de Lie appelée dans ce cas abélienne.

2. Soit $\mathfrak{g}$ une espace vectoriel de dimension 2. Alors, pour toute application bilinéaire antisymétrique μ sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$, le couple $\mathfrak{g} = (V, \mu)$ est une algèbre de Lie. En effet la condition de Jacobi est toujours, dans ce cas, satisfaite.
3. Soit $sl(2, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices d'ordre 2 de trace nulle. Le produit

$$\mu(A, B) = AB - BA$$

est bien défini sur $sl(2, \mathbb{C})$ car $tr(AB - BA) = 0$ dès que $A, B \in sl(2, \mathbb{C})$. Comme cette multiplication vérifie l'identité de Jacobi, $sl(2, \mathbb{C})$ est une algèbre de Lie complexe de dimension 3.

1.3 Sous-algèbres de Lie, morphismes.

Un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $(\mathfrak{g}, \mu)$ si pour tout $X, Y \in \mathfrak{h}$ on a $\mu(X, Y) \in \mathfrak{h}$. Bien évidemment, une sous-algèbre de Lie est une algèbre de Lie. Une type spécial de sous-algèbres est l'idéal. Un idéal $\mathfrak{I}$ de $(\mathfrak{g}, \mu)$ est une sous-algèbre de Lie vérifiant

$$\forall X \in \mathfrak{I}, \forall Y \in g, \mu(X, Y) \in \mathfrak{I}.$$

Soient $(\mathfrak{g}_1, \mu_1\ )$ et $(\mathfrak{g}_2, \mu_2)$ deux algèbres de Lie. Une application linéaire

$$\varphi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie si

$$\varphi(\mu_1(X, Y)) = \mu_2(\varphi(X), \varphi(Y))$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}_1$. Si de plus φ est un isomorphisme linéaire, on dira que c'est un isomorphisme d'algèbres de Lie. Enfin précisons la notion bien utile d'algèbres de Lie quotient. Si $\mathfrak{I}$ est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il existe une unique structure d'algèbre de Lie sur l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{I}$ pour laquelle la projection canonique

$$\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{I}$$

soit un homorphisme surjectif d'algèbres de Lie.

1.4 Algèbres Lie-admissibles

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative complexe dont la multiplication est notée $A.B$ avec $A, B \in \mathcal{A}$. On voit facilement que le crochet suivant

$$[A, B] = AB - BA$$

définit une structure d'algèbre de Lie sur l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathcal{A}$. On note par $\mathcal{A}^L$ cette algèbre de Lie. Par exemple, si $M(n, \mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des matrices d'ordre n, c'est une algèbre associative pour le produit usuel des matrices. Ainsi $[A, B] = AB - BA$ définit une structure d'algèbre de Lie sur $M(n, \mathbb{C})$. Elle est notée dans ce cas $gl(n, \mathbb{C})$. Précisons toutefois qu'il existe des algèbres de Lie qui ne sont pas définies à partir d'algèbres associatives.

Définition 2 *Une algèbre Lie-admissible est une algèbre (non-associative) $\mathcal{A}$ dont le produit $A.B$ est tel que*

$$[A, B] = AB - BA$$

est un produit d'algèbre de Lie.

Ceci est équivalent à dire que $A.B$ vérifie:

$$\begin{aligned}&(A.B).C - A.(B.C) - (B.A).C + B.(A.C) - (A.C).B + A.(C.B) - (C.B).A + C.(B.A)\\&+(B.C).A - B.(C.A) + (C.A).B - C.(A.B) = 0\end{aligned}$$

pour tout $A, B, C \in \mathcal{A}$.

Exemple : Les algèbres symétriques gauche.

Les algèbres symétriques gauche sont des exemples intéressants, pour diverses raisons, d'algèbres Lie-admissibles. Une algèbre symétrique gauche est une algèbre non-associative (on entend par là une algèbre non nécessairement associative) dont le produit $A.B$ vérifie

$$(A.B).C - A.(B.C) - (B.A).C + B.(A.C) = 0.$$

Il est clair qu'une algèbre symétrique gauche est Lie-admissible. Elles sont étudiées par exemple, dans la recherche des connexions affines invariantes à gauche sur un groupe de Lie sans courbure ni torsion. En effet si un groupe de Lie G admet une telle connexion, son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ provient d'une algèbre symétrique gauche, c'est-à-dire, il existe sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ une structure d'algèbre symétrique gauche de produit $A.B$ tel que le produit d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ soit donné par

$$\mu(A, B) = A.B - B.A$$

Dans ce cas aussi, il existe des algèbres de Lie qui ne sont données par aucune algèbre symétrique gauche, ce qui signifie que pour les groupes de Lie correspondants, toute connexion affine invariante à gauche sans torsion a une courbure non triviale. Nous donnerons un exemple dans la dernière partie de ce cours. A titre d'illustration regardons le cas particulier où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne de dimension 2. Dans ce cas toute algèbre symétrique gauche dont l'anticommutateur donne le crochet (trivial) de $\mathfrak{g}$ est commutative. C'est donc une algèbre associative commutative. Comme on connait la classification de ces algèbres associatives, on en déduit la classification des structures affines dans le plan définies par une connexion affine sans courbure ni torsion dans le groupe de Lie $\mathbb{R}^2$ (dans le cas réel) ou $\mathbb{C}^2$ (dans le cas complexe). Par exemple, considérons l'algèbre associative commutative de dimension 2 donnée dans une base $\{e_1, e_2\}$ par

$$e_1.e_1 = e_1,\ e_1.e_2 = e_2.e_1 = e_2,\ e_2.e_2 = e_2.$$

Soit $X = ae_1 + be_2$. La translation à gauche l_X associée à ce produit est donnée par

$$l_X(e_1) = ae_1 + be_2,\ l_X(e_2) = (a + b)e_2.$$

L'algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{g}$ définie par $[e_1, e_2] = e_1.e_2 - e_2.e_1 = 0$ se représente comme une sous algèbre de l'algèbre de Lie $Aff(\mathbb{R}^2)$ du groupe de Lie affine du plan (réel ou complexe) de la manière suivante :

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} l_X & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ b & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Le groupe de Lie correspondant s'écrit en considérant l'exponentielle de ces matrices (voir paragraphe suivant)

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^a & 0 & e^a - 1 \\ e^a(e^b - 1) & e^a e^b & e^a(e^b - 1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \right\}$$

Ceci revient à dire que G est le groupe des transformations affines du plan :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \longrightarrow e^a x + e^a - 1 \\ y \longrightarrow e^a(e^b - 1)x + e^a e^b y + e^a(e^b - 1) \end{array} \right.$$

Notons que tous ces groupes sont classés, et que le résultat est également connu pour $n = 3$.

Notons également la notion d'algèbres symétriques droite, encore appelées algèbres pré-Lie qui vérifient

$$(A.B).C - A.(B.C) = (A.C).B - A.(C.B).$$

Elles jouent un rôle important dans l'étude des algèbres de Gerstenhaber, de la cohomologie d'Hochschild ou même dans l'étude des algèbres de Rota-Baxter.

1.5 Algèbres de Lie de dimension infinie

La théorie des algèbres de Lie de dimension infinie, c'est-à-dire dont l'espace vectoriel sous-jacent est de dimension infinie est assez différente de celle de la dimension finie. Nous ne l'aborderons pas trop dans ce cours. Dans ce cas, la structure topologique de l'espace vectoriel joue un rôle prépondérant. Par exemple, afin de donner des contre exemples au troisième théorème de Lie-Cartan, W.T Van Est a étudié les algèbres de Lie de Banach. Certaines algèbres de Lie infinies sont de nos jours fortement étudiées. Par exemple, les algèbres de Kac-Moody sont des algèbres de Lie infinies graduées et définies par générateurs et relations. Elles sont construites d'une manière analogue à celle des algèbres de Lie simples. Un autre exemple est donnée par l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur une variété différentiable M. Le produit de Lie est alors le crochet de Lie des champs de vecteurs. La structure d'une telle algèbre est très compliquée. Elle a été étudiée lorsque $M = \mathbb{R}$ ou $M = S^1$. Dans ce cas l'algèbre de Lie est associée (voir paragraphe suivant) au groupe de Lie des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ ou S^1. Une autre classe intéressante d'algèbres de Lie infinies concerne les algèbres de Lie-Cartan. Elles sont définies comme les algèbres de Lie des transformations infinitésimales (des champs de vecteurs) qui laissent invariants une structure donnée, comme une structure symplectique ou une structure de contact. Par exemple si (M, Ω) est une variété symplectique, c'est-à-dire Ω est une forme symplectique sur M, on considère alors

$$L(M, \Omega) = \{X \text{ champs de vecteurs sur } M, L_X\Omega = 0\}$$

où

$$L_X\Omega = i(X)d\Omega + d(i(X)\Omega) = d(i(X)\Omega)$$

est la dérivée de Lie. Alors $L(M, \Omega)$ est une algèbre de Lie réelle de dimension infinie. Elle admet une sous-algèbre L_0 constitutée des champs de vecteurs de $L(M, \Omega)$ à support compact . André Lichnerowicz prouva que toute sous-algèbre de Lie de dimension finie de L_0 est réductive (c'est-à-dire produit direct d'une sous-algèbre semi simple par un centre abélien) et que tout idéal non nul est de dimension infinie.

2 Algèbres de Lie et groupes de Lie

2.1 L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie complexe de dimension n. Pour tout $g \in G$, notons par L_g l'automorphisme de G donné par

$$L_g(x) = gx.$$

Cet automorphisme est appelé la translation à gauche par g. Sa différentielle $(L_g)^*_x$ en un point $x \in G$, est l'isomorphisme vectoriel

$$(L_g)^*_x : T_x(G) \longrightarrow T_{gx}(G)$$

où $T_x(G)$ désigne l'espace tangent au point x à G. Un champ de vecteurs X sur G est dit invariant à gauche s'il vérifie

$$(L_g)^*_x(X(x)) = X(gx)$$

pour tout x et g dans G. On montre que si $[X,Y]$ désigne le crochet de Lie des champs de vecteurs, alors si X et Y sont des champs invariants à gauche sur G, le crochet de Lie $[X,Y]$ est aussi un champ invariant à gauche. Ceci montre que l'espace vectoriel des champs invariants à gauche sur G, muni du crochet de Lie, est une algèbre de Lie. On la note $L(G)$ et elle est appelée l'algèbre de Lie du groupe de Lie G. Comme un champ invariant à gauche X est entièrement défini par sa valeur $X(e)$ en l'élément neutre e de G, l'espace vectoriel $L(G)$ s'identifie naturellement à l'espace tangent $\mathrm{T}_e(G)$ de G en e. Si $u, v \in T_e(G)$, il existe $X, Y \in L(G)$ tels que $u = X(e)$ et $v = Y(e)$. Posons

$$\mu(u,v) = [X,Y](e).$$

Alors $(T_e(G), \mu)$ est une algèbre de Lie isomorphe à $L(G)$. On confondra souvent les deux. Par exemple l'algèbre de Lie du groupe de Lie algébrique $SL(2,\mathbb{C})$ est isomorphe à $sl(2,\mathbb{C})$.

Ainsi cette construction permet de définir pour chaque groupe de Lie, une et une seule (classe d'isomorphie d') algèbre de Lie. Mais l'inverse n'est pas vrai. En dimension finie, plusieurs groupes de Lie peuvent avoir la même algèbre de Lie. En dimension infinie, il existe des algèbres de Lie qui ne sont des algèbres d'aucun groupe de Lie. Précisons brièvement ces deux remarques. Supposons tout d'abord que $\mathfrak{g}$ soit une algèbre de Lie de dimension finie. A partir de sa multiplication μ, on paut définir un groupe local dont le produit est donné par la formule de Campbell-Hausdorff :

$$X.Y = X + Y + \frac{1}{2}\mu(X,Y) + \frac{1}{12}\mu(\mu(X,Y),Y) - \frac{1}{12}\mu(\mu(X,Y),X) + \ldots.$$

qui est une somme infinie de termes exprimés à l'aide de la multiplication μ. Cette structure locale peut être étendue en une structure globale de groupe de Lie en imposant une condition topologique de simple connexité et de connexité. On a donc une correspondance biunivoque entre l'ensemble des algèbres de Lie de dimension finie complexes (mais ceci reste vrai dans le cas réel) et l'ensemble des groupes de Lie connexes et simplement connexes dont la dimension en tant que variété différentielle est la dimension de l'algèbre de Lie. Deux groupes de Lie de dimension finie ayant des algèbres de Lie isomorphes sont donc localement isomorphes.

Dans le cas de la dimension infinie, la situation est différente. W.T.Van Est a montré l'existence d'algèbres de Lie de Banach de dimension infinie qui n'étaient des algèbres de Lie d'aucun groupes de Lie de dimension infinie. Ainsi, dans ce cas, il n'y a pas d'équivalent au troisième théorème de Lie-Cartan.

2.2 Relation entre un groupe de Lie et son algèbre de Lie

Définition 3 *Un groupe de Lie est dit linéaire si c'est un sous-groupe de Lie du groupe $GL(n,\mathbb{C})$ des matrices inversibles d'ordre n.*

Si G est un groupe de Lie linéaire, son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $gl(n,\mathbb{C})$, l'algèbre de Lie des matrices complexes d'ordre n. Dans ce cas l'application Exponentielle définit une correspondance entre l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et le groupe de Lie G. Rappelons que l'application exponentielle

$$Exp : gl(n,\mathbb{C}) \longrightarrow Gl(n,\mathbb{C})$$

est donnée par la série entière convergente

$$Exp(A) = Id + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Si G est un sous-groupe de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$, l'application exponentielle envoie l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G dans G. Ainsi nous définissons une application exponentielle pour tous les groupes linéaires et leurs algèbres de Lie.

La définition ci-dessus est d'un usage très pratique mais n'est pas donnée pour les groupes de Lie qui ne sont pas des groupes de matrices. La difficulté pourrait être contournée en s'appuyant sur le théorème d'Ado. Ce théorème précise que toute algèbre de Lie de dimension finie peut se représenter comme une algèbre de matrices, plus précisément il existe un entier N tel que l'algèbre de Lie donnée $\mathfrak{g}$ soit isomorphe à une sous-algèbre de dimension n de $gl(N, \mathbb{C})$. Mais l'application du théorème d'Ado est parfois difficile car nous ne connaissons pas précisément l'entier N et l'application exponentielle est dans ce contexte non seulement difficile à écrire mais dépend aussi du choix de la représentation de $\mathfrak{g}$ dans $gl(N, \mathbb{C})$. Nous allons donc définir directement, pour un groupe de Lie abstrait G, cette application exponentielle et vérifier qu'elle coïncide avec l'application exponentielle des groupes de Lie linéaires. Chaque vecteur X de $\mathfrak{g}$ détermine une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{g}$ ayant X comme image de 1 et qui soit un homomorphisme d'algèbre de Lie. Comme $\mathbb{R}$ est l'algèbre de Lie réelle du groupe de Lie connexe et simplement connexe $\mathbb{R}$, cette application induit un homomorphisme de groupes de Lie

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

tel que

$$c(s + t) = c(s) + c(t)$$

pour tout s et t. L'opération dans la partie droite de la formule correspond à la multiplication dans G. Compte tenu de la ressemblance de cette formule avec la propriété caractéristique de l'application exponentielle des matrices, on est conduit à poser la définition suivante:

$$Exp(X) = c(1).$$

Cette application est appelée l'application exponentielle et envoie bien l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans le groupe de Lie G. Elle détermine un difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ et un voisinage de l'élément neutre dans G. L'application exponentielle n'est pas toujours surjective même si le groupe G est supposé connexe. Par exemple, on montre que l'application exponentielle

$$Exp : sl(2, \mathbb{C}) \longrightarrow Sl(2, \mathbb{C})$$

n'est pas surjective. Mais si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nilpotente (voir la définition dans les paragraphes suivants), alors Exp est bijective.

3 Classifications des algèbres de Lie complexes

3.1 Algèbres de Lie isomorphes

Définition 4 *Deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{g}'$ de dimension n de multiplication μ et μ' sont dites isomorphes s'il existe $f \in Gl(n, \mathbb{C})$ tel que*

$$\mu_f(X, Y) = f * \mu(X, Y) = f^{-1}(\mu(f(X), f(Y)))$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Par exemple, toute algèbre de Lie de dimension 2 a une multiplication qui vérifie

$$\mu(e_1, e_2) = ae_1 + be_2.$$

Un tel produit vérifie toujours l'identité de Jacobi. Si a ou b est non nul, par exemple b, le changement de base

$$\begin{cases} f(e_1) = 1/b\ e_1 \\ f(e_2) = a/be_1 + e_2 \end{cases}$$

définit une multiplication isomorphe donnée par

$$\mu_f(e_1, e_2) = e_2.$$

On en déduit que toute algèbre de Lie de dimension 2 est soit abélienne, soit isomorphe à l'algèbre de Lie dont le produit vérifie

$$\mu(e_1, e_2) = e_2.$$

La classification des algèbres de Lie de dimension n consiste à décrire un représentant de chacune des classes d'isomorphie. Le résultat précédent donne la classification des algèbres de Lie complexes (et réelles) de dimension 2. Notons que la classification générale est de nos jours encore un problème ouvert. Elle est parfaitement connue jusqu'en dimension 5. Au delà, seules des classifications partielles sont établies, ou bien des familles particulières d'algèbres de Lie ont été classées. Nous allons présenter ces familles.

3.2 Algèbres de Lie simples et semi-simples

Définition 5 *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est appelée simple si sa dimension est supérieure ou égale à 2 et si elle ne contient pas d'idéaux propres (autre que $\{0\}$ et $\mathfrak{g}$).*

La classification des algèbres simples complexes (et réelles) est bien connue. Elle est due essentiellement aux travaux d'Elie Cartan, de Dynkin et de Killing. Elle se résume au résultat suivant:

Proposition 1 *Toute algèbre simple complexe de dimension finie est*

i) soit isomorphe à une algèbre de type classique, c'est-à-dire à l'une des algèbres suivantes :$su(n, \mathbb{C})$ (type A_n), $so(2n+1, \mathbb{C})$ (type B_n), $sp(n, \mathbb{C})$ (type C_n), $so(2n, \mathbb{C})$ (type D_n)

ii) soit isomorphe à une algèbre exeptionnelle $E_6,\ E_7,\ E_8,\ F_4,\ G_2$.

On peut trouver les définitions précises de ces algèbres dans le livre de J.P. Serre intitulé SemiSimple Lie algebras. Notons que l'algèbre de Lie E_8 a eu les honneurs de tous les medias ces derniers mois.

Définition 6 *Une algèbre de Lie est appelé semi-simple si elle est non nulle et si elle n'admet pas d'idéaux abéliens non nuls.*

Ces algèbres se caractérisent aussi par le fait qu'elles sont des produits directs d'algèbres simples. Rappelons que si $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont deux algèbres de Lie de multiplications respectives μ_1 et μ_2, alors le produit direct (ou la somme directe externe $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$) est aussi une algèbre de Lie pour le produit

$$\mu(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = \mu_1(X_1, Y_1) + \mu_2(X_2, Y_2)$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \mathfrak{g}_1$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{g}_2$. La classification des algèbres simples implique celle des semi-simples. Notons également que les algèbres de Lie semi-simples se caractérisent par le fait que la forme bilinéaire de Killing-Cartan

$$K(X, Y) = Tr(adX \circ adY)$$

est non dégénérée. Cette forme définit donc un produit scalaire invariant au sens suivant :

$$K(ad(Y)(X), Z) + K(X, ad(Y)(Z)) = 0$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ où adY est l'endomorphisme donnée par $ad(Y)(X) = \mu(Y, X)$, appelé application adjointe.

3.3 Algèbres de Lie nilpotentes

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de multiplication μ et considérons la suite décroissante suivante d'idéaux de $\mathfrak{g}$

$$\begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \\ \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mu(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \\ \mathcal{C}^p(\mathfrak{g}) = \mu(\mathcal{C}^{p-1}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}) \ for\ p > 2. \end{cases}$$

où $\mu(\mathcal{C}^{p-1}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g})$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ engendrée par les produits $\mu(X, Y)$ avec $X \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathfrak{g})$ et $Y \in \mathfrak{g}$.

Définition 7 *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est appelée nilpotente s'il existe un entier k tel que*

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}.$$

Si un tel entier existe, le plus petit k tel que $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ est appelé l'indice de nilpotence ou nilindex de $\mathfrak{g}$.

Pour toute algèbre de Lie nilpotente de dimension n, son nilindex est inférieur ou égal à $n - 1$.
Exemples.
1. Toute algèbre de Lie abélienne vérifie $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Elle est donc nilpotente d'indice 1. Bien entendu, toute algèbre nilpotente d'indice 1 est abélienne.
2. L'algèbre de Heisenberg de dimension $(2p + 1)$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_{2p+1}$ dont le produit dans une base $\{e_1, ..., e_{2p+1}\}$ est donné par

$$\mu(e_{2i+1}, e_{2i+2}) = e_{2p+1}$$

pour $i = 0, ..., p - 1$, les autres produits étant nuls. Cette algèbre de Lie est nilpotente d'indice 2. La sous-algèbre dérivée $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ est engendrée par $\{e_{2p+1}\}$ et coïncide avec le centre $Z(\mathfrak{g})$.

Le résultat suivant est fondamental dans l'étude des algèbres nilpotentes

Théorème 1 *Théorème de Engel. Soit $(\mathfrak{g}, \mu)$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie. Alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente si et seulement si pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme*

$$adX : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

donné par $adX(Y) = \mu(X, Y)$ est nilpotent.

On peut s'intéresser à des sous familles d'algèbres nilpotentes. En particulier

Définition 8 *Une algèbre de Lie nilpotente de dimension n est appelée filiforme si son indice de nilpotence est égal à $n - 1$.*

Par exemple, l'algèbre de Lie de dimension 4, définie dans la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ par

$$\begin{cases} \mu(e_1, e_2) = e_3 \\ \mu(e_1, e_3) = e_4 \end{cases}$$

est filiforme.

La classification des algèbres de Lie nilpotentes complexes (ou réelles) n'est connue, de nos jours, que jusqu'en dimension 7.

- En dimension 1 et 2, toute algèbre nilpotente est abélienne.
- En dimension 3, toute algèbre nilpotente non abélienne est isomorphe à l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_3$. Rappelons que le produit est défini par

  $$\mu(e_1, e_2) = e_3$$

  où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathfrak{g}$.
- En dimension 4, l'algèbre est soit abélienne, soit isomorphe à une somme directe externe d'une algèbre de Lie abélienne de dimension 1 avec l'algèbre de Heisenberg de dimension 3, soit est filiforme et donnée par le produit

  $$\begin{cases} \mu(e_1, e_2) = e_3 \\ \mu(e_1, e_3) = e_4 \end{cases}$$

  dans la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.
- En dimensions 5 et 6, il n'existe toujours qu'un nombre fini de classes d'isomorphie d'algèbres de Lie nilpotentes. On pourra consulter cette liste sur le site

http://www.math.uha.fr/˜algebre

- En dimension 7, (et au delà), il existe une infinité de classes d'isomorphie d'algèbres de Lie nilpotentes. En dimension 7, nous avons 6 familles à un paramètre d'algèbres non isomorphes ainsi qu' une grande famille discrète. Cette liste peut aussi être consultée sur le site

http://www.math.uha.fr/˜algebre

- Pour les dimensions supérieures ou égales à 8, seules des classifications partielles sont connues. Par exemple les algèbres filiformes sont classées jusqu'en dimension 11. Une algèbre filiforme est dite graduée si elle est munie d'une dérivation diagonalisable. La graduation dans ce cas est donnée par les espaces raciniens. Ces algèbres filiformes graduées sont classées (ou plutôt décrites) en toute dimension. Pour approcher une classification générale, nous pouvons utiliser l'invariant suivant, appelée suite caractéristique (ou parfois invariant de Goze dans certains travaux trop élogieux pour l'auteur) ainsi définie

Définition 9 *Soit g une algèbre de Lie nilpotente complexe de dimension n. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, soit $c(X)$ la suite décroissante des invariants de similitude de l'opérateur nilpotent adX (la suite décroissante des dimensions des blocs de Jordan). La suite caractéristique de $\mathfrak{g}$ est la suite*

$$c(\mathfrak{g}) = max\{c(X),\ X \in \mathfrak{g} - C^1(\mathfrak{g})\}$$

l'ordre sur les suites étant l'ordre lexicographique.

En particulier, la suite caractéristique d'une algèbre filiforme de dimension n est $(n-1,1)$ et cette suite caractérise la classe des algèbres filiformes, la suite caractéristique d'une algèbre abélienne est $(1,\cdots,1)$ et celle de l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_{2p+1}$ de dimension $(2p+1)$ est $(2,1,\cdots,1)$ cette suite caractérisant aussi cette algèbre. La classification des algèbres de Lie nilpotentes graduées dont la suite caractéristique est $(n-2,1,1)$ est également connue [18], [9] et [13].

3.4 Algèbres de Lie résolubles

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Considérons la suite d'idéaux suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \\ \mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) = \mu(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \\ \mathcal{D}^p(\mathfrak{g}) = \mu(\mathcal{D}^{p-1}(\mathfrak{g}),\mathcal{D}^{p-1}(\mathfrak{g})) \text{ pour } p > 2. \end{cases}$$

Comme

$$\mathcal{D}^p(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{D}^{p-1}(\mathfrak{g}),\ p > 0$$

cette suite est décroissante.

Définition 10 *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite résoluble s'il existe un entier k tel que*

$$\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}.$$

Exemples.

1. Toute algèbre nilpotente est résoluble car

$$\mathcal{D}^p(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{C}^p(\mathfrak{g}).$$

2. Toute algèbre de Lie de dimension 2 est résoluble. En effet, soit elle est abélienne, soit isomorphe à l'algèbre donnée par

$$\mu(e_1, e_2) = e_2$$

et cette algèbre est résoluble.

Nous pouvons construire des algèbres de Lie résolubles à partir d'algèbres nilpotentes par extension par dérivations. Ce procédé est ainsi défini:

Définition 11 *Une dérivation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un endomorphisme linéaire f satisfaisant*

$$\mu(f(X), Y) + \mu(X, f(Y)) = f(\mu(X, Y))$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Par exemple, les endomorphismes adX donnés par

$$adX(Y) = \mu(X, Y)$$

sont des dérivations (appelées dérivations intérieures). Dans une algèbre de Lie semi-simple, toutes les dérivations sont intérieures. Notons que toute dérivation intérieure est singulière c'est-à-dire non inversible car $X \in Ker(adX)$.

Proposition 1 *Une algèbre de Lie munie d'une dérivation régulière (ou inversible) est nilpotente.*

Ceci étant, soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension n et soit f une dérivation non intérieure. Considérons l'espace vectoriel $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}$ de dimension $n+1$ et notons par e_{n+1} une base du complémentaire $\mathbb{C}$ dans cette extension. Définissons une multiplication dans $\mathfrak{g}'$ par

$$\begin{cases} \mu'(X, Y) = \mu(X, Y), \;\; X, Y \in \mathfrak{g} \\ \mu'(X, e_{n+1}) = f(X), \;\; X \in \mathfrak{g} \end{cases}$$

Ce produit munit $\mathfrak{g}'$ d'une structure d'algèbre de Lie de dimension $n+1$. Cette algèbre est résoluble dès que f n'est pas une dérivation nilpotente.

Partie II

Déformations et rigidité des algèbres de Lie complexes de dimension finie

4 Sur les origines du problème

L'algèbre de Lie de Poincaré, qui se déduit de l'étude des symétries d'un espace vectoriel pseudo-euclidien, incluant les rotations, pseudo-rotations et translations est un produit semi-direct de l'algèbre de type $so(p, q)$ qui correspondant à l'algèbre des matrices antisymétriques par rapport à une forme quadratique non dégénérée de signature (p, q) par une algèbre abélienne (engendrée par les opérateurs moments). Cette algèbre n'est pas semi-simple ni même réductive, c'est-à-dire produit direct d'une algèbre semi-simple par un centre abélien. Toute la théorie classique des représentations des algèbres simples ou semi-simples ne peut donc s'appliquer aux algèbres de Poincaré. Il existe un outil très utile, appelé contraction, qui permet de relier ces algèbres, ou plus généralement des algèbres de Lie non réductives à des algèbres de Lie réductives et exploiter la théorie des représentations de ces dernières. C'est ainsi que l'algèbre de Poincaré correspondant aux symétries d'un espace à 4 dimensions, et à une forme quadratique de signature $(3, 1)$ sera reliée à l'algèbre simple $so(5)$. Cette procédure de contraction permet donc de remonter des propriétés à des algèbres à partir d'autres qui ne leur sont pas isomorphes. Dans le cas de l'algèbre de Poincaré classique, la contraction est obtenue en considérant la célérité comme un paramètre et en faisant tendre ce paramètre vers l'infini. Conceptuellement, ceci signifie que dans l'ensemble des constantes de structure des algèbres de Lie d'une dimension donnée, on considère une suite de familles de constantes chacune de ces familles correspondant à des algèbres de Lie isomorphes et examiner la limite, si elle existe éventuellement. Il nous faut donc établir un cadre formel et topologique pour cette opération. On se fixe une dimension n, une base commune à tous les epaces vectoriels sous-jacents aux algèbres de Lie de dimension n, et sans restriction aucune supposer que tous ces espaces vectoriels sont $\mathbb{C}^n$. Dans la base fixée, chaque algèbre de Lie est déterminée par ses constantes de structures et l'ensemble des algèbres de Lie est donc assimilé à l'ensemble des constantes de structures. Cet ensemble est naturellement muni d'une structure de variété algébrique plongée dans un espace vectoriel. Deux topologies apparaissent naturellement sur cet ensemble, la topologie de Zariski, la plus naturelle, et la topologie métrique induite par l'espace vectoriel, qui est plus fine. Cette variété admet une partition en classes, chaque classe correspond à des algèbres isomorphes. Dans ce cadre, une contraction apparaît comme un point adhérent à une classe. Cette approche amène à une étude topologique plus précise. En particulier la description d'un voisinage (pour les deux topologies) d'une algèbre donnée. Ici apparaît la notion de déformations. Pour la topologie de Zariski, on peut considérer une déformation comme un point proche générique. Il existe une approche classique pour étudier les points génériques, utiliser une extension non archimédienne du corps de base et considérer les algèbres de Lie à coefficients dans un anneau local ayant l'extension comme corps de fractions. C'est ainsi que si nous prenons comme corps, le corps des fractions de l'anneau des séries formelles, nous obtenons les déformations de Gerstenhaber. Nous allons donc définir cette notion de déformation en ayant comme arrière pensée perpétuelle l'objectif topologique.

5 La variété algébrique des algèbres de Lie complexes de dimension n

5.1 Définition de L^n

Une algèbre de Lie complexe de dimension n peut être considérée comme une paire $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ où μ est le produit de l'algèbre de Lie et $\mathbb{C}^n$ l'espace vectoriel sosu-jacent à $\mathfrak{g}$. On peut donc identifier une algèbre de Lie à son produit μ et l'ensemble des algèbres de Lie complexes de dimension n s'identifie à l'ensemble des applications bilinéaires antisymétriques sur $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ et vérifiant l'identité de Jacobi. Fixons, une fois pour toute, une base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ de $\mathbb{C}^n$. Cela n'a que peu d'importance car nous allons étudier les algèbres de Lie à isomorphisme près. Les constantes de structures de μ sont les nombres complexes C_{ij}^k donnés par

$$\mu(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k.$$

Comme la base est fixée, le produit μ s'identifie à ses constantes de structure. Celles-ci satisfont les équations polynomiales qui se déduisent des conditions de Jacobi et de l'antisymétrie:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} C_{ij}^k = -C_{ji}^k \ , \quad 1 \leq i < j \leq n \ , \quad 1 \leq k \leq n \\ \\ \sum_{l=1}^{n} C_{ij}^l C_{lk}^s + C_{jk}^l C_{li}^s + C_{ki}^l C_{jl}^s = 0 \ , \quad 1 \leq i < j < k \leq n \ , \quad 1 \leq s \leq n. \end{array} \right.$$

Si nous notons par L^n l'ensemble des algèbres de Lie complexes de dimension n, cet ensemble apparait donc comme une variété algébrique plongée dans $\mathbb{C}^{n^3}$ et paramétrée par les C_{ij}^k. Comme il n'y a aucune confusion possible, on pourra toujours noter par μ les éléments de L^n.

5.2 Orbite d'une algèbre de Lie dans L^n

Si $\mu \in L^n$ et si $f \in Gl(n, \mathbb{C})$ est un isomorphisme linéaire, nous avons défini le produit μ_f isomorphe à μ par

$$\mu_f(X, Y) = f * \mu(X, Y) = f^{-1}(\mu(f(X), f(Y)))$$

pour tout $X, Y \in \mathbb{C}^n$. On définit ainsi une action du groupe algébrique $Gl(n, \mathbb{C})$ sur L^n. On notera $\mathcal{O}(\mu)$ l'orbite du point μ relative à cette action. Considérons le sous-groupe G_μ de $Gl(n, \mathbb{C})$ défini par

$$G_\mu = \{f \in Gl(n, \mathbb{C}) \mid \quad f * \mu = \mu\}$$

Son algèbre de Lie est l'algèbre de Lie des dérivations $Der(\mathfrak{g})$ des dérivations $\mathfrak{g} = (\mu, \mathbb{C}^n)$. L'orbite $\mathcal{O}(\mu)$ est donc isomorphe à l'espace homogène $Gl(n, \mathbb{C})/G_\mu$. Cet espace est une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension égale à

$$\dim \mathcal{O}(\mu) = n^2 - \dim Der(\mu).$$

On a donc montré

Proposition 2 *L' orbite $\mathcal{O}(\mu)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = (\mu, \mathbb{C}^n)$ est une variété différentiable homogène de dimension*

$$\dim \mathcal{O}(\mu) = n^2 - \dim Der(\mu).$$

5.3 Rappel sur la cohomologie de Chevalley d'une algèbre de Lie

Soit $\mathfrak{g} = (\mu,\mathbb{C}^n)$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie. Notons par $\mathcal{C}^p(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ l'espace vectoriel des applications p-linéaires alternées sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ et à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Pour tout p, on définit l'endomorphisme

$$\delta_p : \mathcal{C}^p(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{C}^{p+1}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$$

par

$$\begin{array}{rl} \delta_p\Phi(Y_1,\dots,Y_{p+1}) = & \sum_{l=1}^{p+1}(-1)^{l+1}\mu(Y_l,\Phi(Y_1,\dots,\hat{Y}_l,\dots,Y_{p+1})) \\ & +\sum_{r<s}(-1)^{r+s}\Phi(\mu(Y_r,Y_s),Y_1,\dots,\hat{Y}_r,\dots,\hat{Y}_s,\dots,Y_{p+1}) \end{array}$$

avec $Y_i \in \mathbb{C}^n$ et où $\hat{Y}$ signifie que ce vecteur n'apparaît pas. Ces homomorphismes satisfont

$$\delta_{p+1}\circ\delta_p = 0$$

et la cohomologie de Chevalley de $\mathfrak{g}$ est la cohomologie $H^*(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ associée au complexe $(\mathcal{C}^p(\mathfrak{g},\mathfrak{g}),\delta_p)_{p\geq 0}$ c'est-à-dire

$$H^p(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \frac{Z^p(\mathfrak{g},\mathfrak{g})}{B^p(\mathfrak{g},\mathfrak{g})}$$

où $Z^p(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \{\Phi \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{g},\mathfrak{g}), \delta_p\Phi = 0\} = Ker\ \delta_p$ et $B^p(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = Im\delta_{p-1}$. On a, en particulier

- Si $X \in \mathfrak{g}$, $\delta_0 X = adX$.
- Si $f \in End(\mathfrak{g})$, $\delta_1 f(X,Y) = \mu(f(X),Y) + \mu(X,f(Y)) - f(\mu(X,Y))$
- Si $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$

$$\begin{array}{rl} \delta_2\varphi(X,Y,Z) = & \mu(\varphi(X,Y),Z) + \mu(\varphi(Y,Z),X) + \mu(\varphi(Z,X),Y) + \varphi(\mu(X,Y),Z) \\ & +\varphi(\mu(Y,Z),X) + \varphi(\mu(Z,X),Y). \end{array}$$

5.4 Sur la géométrie tangente au point μ à L^n et $\mathcal{O}(\mu)$

Nous avons vu que l'orbite $\mathcal{O}(\mu)$ de μ est une variété différentiable plongée dans L^n définie par

$$\mathcal{O}(\mu) = \frac{Gl(n,\mathbb{C})}{G_\mu}$$

Soit μ' un point proche de μ dans $\mathcal{O}(\mu)$ (pour la topologie de la variété). Il existe $f \in Gl(n,\mathbb{C})$ tel que $\mu' = f * \mu$. Supposons que f soit proche de l'identité, $f = Id + \varepsilon g$, avec $g \in gl(n)$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \mu'(X,Y) & = & \mu(X,Y) + \varepsilon[-g(\mu(X,Y)) + \mu(g(X),Y) + \mu(X,g(Y))] \\ & & +\varepsilon^2[\mu(g(X),g(Y)) - g(\mu(g(X),Y) + \mu(X,g(Y)) - g\mu(X,Y)] \end{array}$$

et

$$lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu'(X,Y) - \mu(X,Y)}{\varepsilon} = \delta^1 g(X,Y)$$

où $\delta^1 g$ est l'opérateur cobord associé à la cohomologie de Chevalley de $\mathfrak{g}$.

Proposition 3 *L'espace tangent à l'orbite $\mathcal{O}(\mu)$ au point μ est l'espace $B^2(\mu,\mu)$ des 2-cobords de la cohomologie de Chevalley de $\mathfrak{g} = (\mu, \mathbb{C}^n)$.*

L'espace tangent au point μ à L^n est plus délicat à définir car L^n est une variété algébrique avec de nombreux points singuliers. Nous pouvons toutefois définir les droites tangentes. On considère pour cela un point $\mu_t = \mu + t\varphi \in L^n$ où t est un paramètre complexe. Mais μ_t vérifie la condition de Jacobi pour tout t si et seulement si

$$\begin{cases} \delta^2\varphi = 0, \\ \varphi \in L^n. \end{cases}$$

On a ainsi

Proposition 4 *Un droite affine Δ passant par μ est tangente en μ à L^n si son vecteur directeur appartient à $Z^2(\mu,\mu)$.*

Cette étude géométrique montre qu'une étude plus algébrique de L^n est nécessaire. Ceci nous conduit à étudier le schéma affine associé. Rappelons que la notion de variété algébrique et de schéma coïncident lorsque ce dernier est réduit. Mais nous allons voir que pour L^n, exceptées pour les petites valeurs de n, le schéma n'est pas réduit et donc bon nombre de propriétés va s'exprimer en terme de schémas associés.

5.5 Le schéma $\mathcal{L}^n$.

On considère les C_{ij}^k avec $1 \leq i < j \leq n$ et $1 \leq k \leq n$ comme des variables formelles et soit $\mathbb{C}[C_{ij}^k]$ l'anneau des polynômes complexes en les $\frac{n^3-n^2}{2}$ variables C_{ij}^k. Soit I_J l'idéal de $\mathbb{C}[C_{ij}^k]$ engendré par les polynômes de Jacobi :

$$\sum_{l=1}^{n} C_{ij}^l C_{lk}^s + C_{jk}^l C_{li}^s + C_{ki}^l C_{jl}^s$$

avec $1 \leq i < j < k \leq n$, et $1 \leq s \leq n$. Ces polynômes sont au nombre de $n(n-1)(n-2)/6$. La variété algébrique L^n est l'ensemble algébrique associé à l'idéal I_J :

$$L^n = V(I_J) = \left\{ x \in \mathbb{C}^{\frac{n^3-n^2}{2}}, \text{ tels que } P(x) = 0, \forall P \in I_J \right\}.$$

Soit $rad(I_J)$ le radical de l'idéal I_J c'est-à-dire

$$rad(I_J) = \{P \in \mathbb{C}[C_{jk}^i], \text{ tels que } \exists r \in \mathbb{N}^*, \ P^r \in I_J\}$$

En général, $radI_J \neq I_J$ (Rappelons que si I est premier alors $rad(I) = I$). Si M est un sous-ensemble de $\mathbb{C}^{\frac{n^3-n^2}{2}}$, on note par $\mathfrak{i}(M)$ l'idéal de $\mathbb{C}[C_{jk}^i]$ défini par

$$\mathfrak{i}(M) = \{P \in \mathbb{C}[C_{jk}^i], P(x) = 0 \quad \forall x \in M\}.$$

On a alors

$$\mathfrak{i}(L^n) = \mathfrak{i}(V(I_J)) = rad(I_J).$$

Considérons l'anneau

$$A(L^n) = \frac{\mathbb{C}[C^i_{jk}]}{I_J}$$

qui est aussi une $\mathbb{C}-$algèbre de type fini. Il correspond à l'anneau des fonctions régulières sur L^n. Rappelons que si un idéal I d'un anneau A est premier, l'anneau quotient A/I est un anneau intègre et que tout idéal maximal est premier. L'anneau quotient est dit réduit s'il ne contient pas d'éléments nilpotents. Comme en général $radI_J \neq I_J$, l'algèbre $A(L^n)$ n'est pas réduite.

L'algèbre affine $\Gamma(L^n)$ de la variété algébrique L^n est l'anneau quotient

$$\Gamma(L^n) = \frac{\mathbb{C}[C^i_{jk}]}{\mathfrak{i}(L^n)}.$$

Comme on a

$$\mathfrak{i}(L^n) = rad\mathfrak{i}(L^n),$$

on en déduit que $\Gamma(L^n)$ est toujours réduite.

Le spectre maximal $Spm(A(L^n))$ de $A(L^n)$ est l'ensemble des idéaux maximaux de l'algèbre $A(L^n)$. Pour chaque $x \in L^n$, l'ensemble

$$\mathcal{M}_x = \{f \in A(L^n), f(x) = 0\}$$

est un idéal maximal de $A(L^n)$. L'application $x \in L^n \to \mathcal{M}_x$ définit une bijection entre L^n et $Spm(A(L^n))$

$$Spm(A(L^n)) \sim L^n.$$

On rajoute en quelque sorte des nouveaux points à L^n en considérant une extension de $Spm(A(L^n))$ à savoir

$$Spec(A(L^n)) = \{I, \text{ où } I \text{ est un idéal premier propre de } A(L^n)\}$$

Comme tout idéal maximal est premier, on a bien $Spm(A(L^n)) \subset Spec(A(L^n))$. On munit $Spec(A(L^n))$ de la topologie de Zariski : Les ensembles fermés sont définis ainsi : soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $A(L^n)$, on considère le sous ensemble $V(\mathfrak{a})$ de $Spec(A(L^n))$ constitué des idéaux premiers de $A(L^n)$ contenant $\mathfrak{a}$. Ces ensembles forment la famille de fermés de la topologie. On en déduit que les ensembles

$$Spec(A(L^n))_f = \{I \in Spec(A(L^n)), f \notin I\}$$

où $f \in A(L^n)$ forment une base d'ouverts. Il existe un faisceau de fonctions $\mathcal{O}_{Spec(A(L^n))}$ sur $Spec(A(L^n))$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ tel que pour tout $f \in A(L^n)$, on ait

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_{Spec(A(L^n))}) = A(L^n)_f$$

où $A(L^n)_f$ est l'anneau des fonctions

$$x \to \frac{g(x)}{f(x)^n}$$

pour $x \in D(f) = \{y, f(y) \neq 0\}$ et $g \in A(L^n)$. En particulier on a

$$\Gamma(Spec(A(L^n)), \mathcal{O}_{Spec(A(L^n))}) = A(L^n)$$

Le schéma affine de l'anneau $A(L^n)$ est l'espace $(Spec(A(L^n)), \mathcal{O}_{Spec(A(L^n))})$ noté aussi $Spec(A(L^n))$ ou $\mathcal{L}^n$.

Comme tout point x de L^n correspond bijectivement à un point de $Spec(A(L^n))$ donné par un idéal maximal, nous pouvons définir un espace tangent en x à $Spec(A(L^n))$. On considère pour cela une déformation infinitésimale de l'algèbre $\Gamma(Spm(A(L^n)), \mathcal{O}_{Spm(A(L^n))})$ en ce point. Si $F_1, ..., F_N$ avec $N = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ sont les polynômes de Jacobi, alors l'espace tangent en x au schéma $\mathcal{L}^n$ est

$$T_x(\mathcal{L}^n) = Ker\, d_x(F_1, .., F_N)$$

où d_x désigne la matrice jacobienne des F_i au point x. D'après la définition de la cohomologie de Chevalley de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ correspondant au point x, on a :

Théorème 2 $T_x(\mathcal{L}^n) = Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$

6 Contractions d' algèbres de Lie

Parfois le mot contraction est remplacé par dégénéréscence ou dégénération pour les anglophiles. Dans toute cette partie, nous confondrons sans retenue une algèbre de Lie complexe de dimension n, sa multiplication et le point correspondant de la variété L^n voire même du schéma affine. Rappelons que L^n est fibrée par les orbites relatives à l'action du groupe algébrique $GL(n, \mathbb{C})$ et nous avons notée par $\mathcal{O}(\mu)$ l'orbite du point μ.

6.1 Définition d'une contraction d'algèbre de Lie et exemples

Soit $g = (\mu, \mathbb{C}^n)$ une algèbre de Lie complexe de dimension n.

Définition 12 *Une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}_0 = (\mu_0, \mathbb{C}^n)$, $\mu_0 \in L^n$ *est appelée contraction de* $\mathfrak{g} = (\mu, \mathbb{C}^n)$ *si* $\mu_0 \in \overline{\mathcal{O}(\mu)}$.

La notion historique de contraction est celle de Segal. Elle est ainsi définie : Soit $\{f_p\}$ une suite dans $GL(n, \mathbb{C})$. On déduit la suite $\{\mu_p\}$ dans L^n en posant

$$\mu_p = f_p * \mu$$

Si cette suite admet une limite μ_0 dans l'espace vectoriel des applications bilinéaires alternées, alors $\mu_0 \in L^n$ et μ_0 est appelée une contraction de μ. Le lien entre ces deux notions est donné par la proposition suivante

Proposition 5 *Pour tout* $\mu \in L^n$, *l'adhérence de Zariski* $\overline{\mathcal{O}(\mu)}$ *de l'orbite* $\mathcal{O}(\mu)$ *est équivalente à l'adhérence pour la topologie métrique induite*

$$\overline{\mathcal{O}(\mu)} = \overline{\mathcal{O}(\mu)}^d.$$

Démonstration. Ceci repose essentiellement sur le fait que le corps de base est $\mathbb{C}$.

Corollaire 1 *Toute contraction de $\mu \in L^n$ est obtenue par une contraction de Segal.*

Exemples.

- Le cas abélien. Toute algèbre de Lie de dimension n se contracte sur l'algèbre de Lie abélienne de dimension n. En effet si μ est donnée dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ par $\mu(e_i, e_j) = \sum C_{ij}^k e_k$, on considère alors l'isomorphisme donné par $f_\varepsilon(X_i) = \varepsilon X_i, \varepsilon \neq 0$. Alors la multiplication $\mu_\varepsilon = f_\varepsilon * \mu$ vérifie $\mu_\varepsilon(X_i, X_j) = \sum \varepsilon C_{ij}^k X_k$ et $lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon$ existe et coïncide avec le produit de l'algèbre abélienne.

- L'agèbre de Poincaré. Le groupe de Lie de Poincaré est le groupe des isométries de l'espace de Minkowski. C'est un groupe de Lie non compact de dimension 10. C'est en fait le groupe affine associé au groupe de Lorentz. C'est donc un produit semi-direct des translations et des transformations de Lorentz. L'algèbre de Poincaré est l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré. On note classiquement par P les générateurs des translations et par M ceux des transformations de Lorentz. La multiplication de cette algèbre, que nous allons noter aussi classiquement par le crochet est donnée par

$$\begin{cases} [P_\mu, P_\nu] = 0, \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] = \eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} \end{cases}$$

  où η est la métrique de Minkowski et dans cette notation $M_{ab} = -M_{ba}$. Ceci étant considérons l'algèbre de Lie simple $so(5)$ dont les éléments sont les matrices antisymétriques d'ordre 5. Elle est de dimension 10. Nous allons montrer que l'algèbre de Poincaré est une contraction de $so(5)$. L'algèbre $so(5)$ a trois formes réelles non équivalentes (une forme réelle est une algèbre de Lie réelle dont la complexifiée est isomorphe à l'algèbre complexe $so(5)$). Ces formes sont l'algèbre de de Sitter, l'algèbre anti de Sitter et la forme compacte, l'algèbre réelle $so(5, \mathbb{R})$. Elle correspondent respectivement aux signatures de la forme de Killing Cartan suivantes : $(-++++), (-+++-)$ et $(+++++)$. Si M_{ab} sont les générateurs de l'algèbre de de Sitter (et anti de Sitter), $0 \leq a, b \leq 4$, alors les éléments $M_{\mu\nu}$ pour $0 \leq \mu, \nu \leq 3$ engendrent une sous-algèbre isomorphe à l'algèbre de Lorentz $so(3, 1)$. Soit ε un réel positif. Le changement de base

$$P_m^\varepsilon = \varepsilon M_{m4}$$

  implique

$$[P_m^\varepsilon, P_n^\varepsilon] = \varepsilon^2 [M_{m4}, M_{n4}]$$

  et

$$[M_{lm}, P_n^\varepsilon] = \eta_{mn} P_l^\varepsilon - \eta_{\ln} P_m^\varepsilon$$

  Lorsque $\varepsilon \to 0$, alors

$$[P_m^\varepsilon, P_n^\varepsilon] = \varepsilon^2 [M_{m4}, M_{n4}] \to 0$$

  et on obtient les crochets de l'algèbre de Poincaré.

6.2 Algèbres de Lie de contact, Algèbres de Lie frobéniusiennes.

Considérons l'ouvert (de Zariski) $\mathcal{C}_{2p+1}$ de L^{2p+1} dont les éléments sont les algèbres de Lie de dimension $(2p+1)$ munie d'une forme de contact. Rappelons qu'une forme de contact est un élément $\omega \in \mathfrak{g}^*$ (le dual vectoriel de $\mathfrak{g}$) satisfaisant

$$\omega \wedge (d\omega)^p \neq 0$$

où $d\omega$ est la 2-forme extérieure sur $\mathfrak{g}$ donnée par

$$d\omega(X,Y) = \omega[X,Y]$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$. Il existe alors une base $\{X_1, X_2, ..., X_{2p+1}\}$ de $\mathfrak{g}$ telle que la base duale $\{\omega_1, \omega_2 ..., \omega_{2p+1}\}$ satisfasse $\omega = \omega_1$ et

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_3 + \omega_4 \wedge \omega_5 + ... + \omega_{2p} \wedge \omega_{2p+1}.$$

En particulier les constantes de structure de $\mathfrak{g}$ relatives à cette base vérifent

$$C_{23}^1 = C_{34}^1 = ... = C_{2p2p+1}^1 = 1.$$

Considérons l'isomorphisme f_ε de $\mathbb{C}^{2p+1}$ donné par

$$f_\varepsilon(X_1) = \varepsilon^2 X_1, \ f_\varepsilon(X_i) = \varepsilon X_i \quad i = 2, ..., 2p+1.$$

Les structures de constantes D_{ij}^k de $\mu_\varepsilon = f_\varepsilon * \mu$ par rapport à la base $\{X_1, X_2, ..., X_{2p+1}\}$ sont

$$\begin{cases} D_{23}^1 = D_{34}^1 = ... = D_{2p2p+1}^1 = 1 \\ D_{ij}^k = \varepsilon C_{ij}^k \text{ pour tous les autres indices.} \end{cases}$$

Ainsi $lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon$ existe et cette limite correspond à la multiplication de l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_{2p+1}$ de dimension $2p+1$. Ainsi $\mathfrak{h}_{2p+1} \in \overline{\mathcal{C}_{2p+1}}$.

Proposition 6 *Toute algèbre de Lie de dimension $2p+1$ munie d'une forme de contact se contracte sur l'algèbre de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}_{2p+1}$ de dimension $2p+1$. De plus, toute algèbre de Lie qui se contracte sur $\mathfrak{h}_p$ admet une forme de contact.*

Le cas des algèbres frobéniusiennes est l'analogue en dimension paire. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension $2p$. Elle est appelée frobéniusienne s'il existe une forme linéaire non nulle $\omega \in \mathfrak{g}^*$ telle que

$$[d\omega]^p \neq 0.$$

Dans ce cas, la 2-forme $\theta = d\omega$ est une forme symplectique exacte sur $\mathfrak{g}$.

Théorème 3 *[15] Soit $\{F_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{C}^{p-1}\}$ la famille à $(p-1)$-paramètres d'algèbres de Lie de dimension $2p$ donnée par*

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \sum_{k=1}^{p-1} \omega_{2k+1} \wedge \omega_{2k+2} \\ d\omega_2 = 0 \\ d\omega_{2k+1} = \varphi_k \omega_2 \wedge \omega_{2k+1}, \ 1 \leq k \leq p-1 \\ d\omega_{2k+2} = -(1+\varphi_k)\,\omega_2 \wedge \omega_{2k+2}, \ 1 \leq k \leq p-1 \end{cases}$$

où $\{\omega_1, .., \omega_{2p}\}$ est une base $\left(\mathbb{C}^{2p}\right)^*$. La famille $\{F_\varphi\}$ est un modèle irréductible complexe pour la proprité "Il existe une forme symplectique exacte", c'est-à-dire toute algèbre de Lie de dimension $2p$ frobéniusienne se contracte sur un élément de la famille, et il n'existe aucune contraction entre deux éléments distincts de $\{F_\varphi\}$.

Notons que la famille F_φ est graduée : si $\{X_1, .., X_{2p}\}$ est la base duale de $\{\omega_1, .., \omega_{2p}\}$, alors $F_\varphi = (F_\varphi)_0 \oplus (F_\varphi)_1 \oplus (F_\varphi)_2$, où $(F_\varphi)_0 = \mathbb{C}X_2, (F_\varphi)_1 = \sum_{k=3}^{2p} \mathbb{C}X_k$ et $(F_\varphi)_2 = \mathbb{C}X_1$. Cette décomposition se révèle intéressante lors de calcul de cohomologie des algèbres frobéniusiennes.

Démonstration. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie frobéniusienne de dimension $2p$. Il existe une base $\{X_1, ..., X_{2p}\}$ de $\mathfrak{g}$ telle que la base duale $\{\omega_1, ..., \omega_{2p}\}$ vérifie

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_2 + ... + \omega_{2p-1} \wedge \omega_{2p},$$

c'est-à-dire nous pouvons supposer ω_1 frobéniusienne. Considérons la famille de changement de bases :

$$f_\epsilon(X_1) = \epsilon^2 X_1,\ f_\epsilon(X_2) = X_2,\ f_\epsilon(X_i) = \epsilon X_i,\ i = 3, ..., 2p$$

où ε est un paramètre complexe. Lorsque $\varepsilon \to 0$, nous obtenons des contractions de $\mathfrak{g}$ dont les équations de Maurer-Cartan sont

$$\left\{\begin{array}{l} d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_2 + ... + \omega_{2p-1} \wedge \omega_{2p}, \\ d\omega_2 = 0, \\ d\omega_3 = C_{23}^3 \omega_2 \wedge \omega_3 + C_{24}^3 \omega_2 \wedge \omega_4 + ... + C_{22p-1}^3 \omega_2 \wedge \omega_{2p-1} + C_{22p}^3 \omega_2 \wedge \omega_{2p}, \\ d\omega_4 = C_{23}^4 \omega_2 \wedge \omega_3 + (-1 - C_{23}^3)\omega_2 \wedge \omega_4 + ... + C_{22p-1}^4 \omega_2 \wedge \omega_{2p-1} + C_{22p}^4 \omega_2 \wedge \omega_{2p}, \\ .... \\ d\omega_{2p-1} = C_{22p}^4 \omega_2 \wedge \omega_3 + C_{2p}^3 \omega_2 \wedge \omega_4 + ... + C_{22p-1}^{2p-1} \omega_2 \wedge \omega_{2p-1} + C_{22p}^{2p-1} \omega_2 \wedge \omega_{2p}, \\ d\omega_{2p} = C_{22p-1}^4 \omega_2 \wedge \omega_3 + C_{22p-1}^3 \omega_2 \wedge \omega_4 + ... + C_{22p-1}^{2p} \omega_2 \wedge \omega_{2p-1} + (-1 - C_{22p-1}^{2p-1})\omega_2 \wedge \omega_{2p}. \end{array}\right.$$

Le reste de la démonstration consiste à réduire l'opérateur ψ défini comme la restriction de l'opérateur adjoint adX_2 au sous-espace invariant F engendré par $\{X_3, ..., X_{2p}\}$. On vérifie directement les propriétés suivantes :

- Si α et β sont des valeurs propres de ψ telles que $\alpha \neq -1-\beta$, alors les espaces propres correspondants F_α et F_β vérifient $[F_\alpha, F_\beta] = 0$.
- Si α est une valeur propre de of ψ différente de $-\frac{1}{2}$, alors pour tout X et $Y \in F_\alpha$, on a $[X, Y] = 0$.
- Si α est valeur propre de ψ, alors $-1 - \alpha$ est aussi une valeur propre de ψ.
- Les multiplicités des valeurs propres α et $-1 - \alpha$ sont égales.
- La suite ordonnée des blocs de Jordan des valeurs propres α et $-1 - \alpha$ sont les mêmes.

A partir de ces remarques, on peut trouver une base de Jordan de ψ telle que la matrice ψ restreint au sous-espace invariant $C_\alpha \oplus C_{-1-\alpha}$ où C_λ est le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & -1-\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & ... \\ 0 & -1 & 0 & -1-\alpha & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1-\alpha & ... \\ & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Ainsi les valeurs propres et la dimension de blocs de Jordan correspondants classent les éléments de la famille du modèle frobéniusien.

Remarque : Dans [15] on trouve également le modèle frobéniusien dans le cas réel.

6.3 Contractions d'Inönü-Wigner

Pour définir les contractions d'Inönü-Wigner, on considère la famille à un paramètre d'isomorphismes $\{f_\epsilon\}$ de $GL(n,\mathbb{C})$ de la forme

$$f_\epsilon = f_1 + \epsilon f_2$$

où $f_1 \in gl(n,\mathbb{C})$ est un opérateur singulier, c'est-à-dire $det(f_1) = 0$ et $f_2 \in GL(n,\mathbb{C})$. Les matrices de ces applications linéaires peuvent se réduire simultanément sous la forme

$$f_1 = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; f_2 = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & Id_{n-r} \end{pmatrix}$$

où $rang(f_1) = rang(v) = r$.
Les contractions associées à de telles familles d'isomorphismes sont appelées les contractions d'Inönü-Wigner. Elles permettent de contracter une algèbre de Lie donnée $\mathfrak{g}$ dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ en laissant invariant une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ of $\mathfrak{g}$ ce qui signifie que $\mathfrak{h}$ est encore une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_0$. Par exemple, l'algèbre de Lorentz homogène peut se contracter, via une contraction d'Inönü-Wigner dans l'algèbre homogène de Galilée. De même, l'algèbre de De Sitter peut se contracter dans l'algèbre de Lorentz non homogène.

Donnons à présent une brève description des contractions d'Inonü-Wigner. Soit $\mathfrak{g} = (\mu, \mathbb{C}^n)$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Fixons une base $\{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $\{e_1, ..., e_p\}$ soit une base de $\mathfrak{h}$. Alors

$$\mu(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{p} C_{ij}^k e_k, \quad i, j = 1, ..., p.$$

Considérons la famille d'isomorphismes d'Inönü-Wigner donnée par

$$\begin{cases} f_\epsilon(e_i) = (1+\epsilon)e_i, \quad i = 1, ..., p \\ \\ f_\epsilon(e_l) = \epsilon e_l, \quad l = p+1, ..., n. \end{cases}$$

On a ici $f_\epsilon = f_1 + \epsilon f_2$ avec

$$f_1 = \begin{pmatrix} Id_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; f_2 = \begin{pmatrix} Id_p & 0 \\ 0 & Id_{n-p} \end{pmatrix}.$$

La multiplication $\mu_\epsilon = f_\epsilon * \mu$ s'écrit

$$\begin{cases} \mu_\epsilon(e_i, e_j) = (1+\epsilon)^{-1}\mu(e_i, e_j), \quad i, j = 1, ..., p \\ \\ \mu_\epsilon(e_i, e_l) = \epsilon(1+\epsilon)^{-1} \sum_{k=1}^{p} C_{ij}^k e_k + (1+\epsilon)^{-1} \sum_{k=p+1}^{n} C_{il}^k e_k, \quad i = 1, .., p, \; l = p+1, ..., n \\ \\ \mu_\epsilon(e_l, e_m) = \epsilon^2(1+\epsilon)^{-1} \sum_{k=1}^{p} C_{lm}^k e_k + \epsilon \sum_{k=p+1}^{n} C_{lm}^k e_k, \quad l, m = p+1, ..., n \end{cases}$$

Si $\epsilon \to 0$, la suite $\{\mu_\epsilon\}$ a pour limite μ_0 donnée par

$$\begin{cases} \mu_0(e_i, e_j) = \mu(e_i, e_j), \quad i, j = 1, ..., p \\ \mu_0(e_i, e_l) = \sum_{k=p+1}^{n} C_{il}^k e_k, \quad i = 1, .., p, \ l = p+1, ..., n \\ \mu_0(e_l, e_m) = 0, \quad l, m = p+1, ..., n. \end{cases}$$

L'algèbre $\mathfrak{g}_0 = (\mu_0, \mathbb{C}^n)$ est une contraction d'Inönü-Wigner de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ est bien une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_0$. Notons également que $\mathbb{C}\{e_{p+1}, ..., e_n\}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}_0$.

Proposition 7 *Si $\mathfrak{g}_0$ est une contraction d' Inönü-Wigner de $\mathfrak{g}$ qui laisse invariante la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ alors*

$$g_0 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$$

où $\mathfrak{a}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}_0$.

Remarques

1. Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ alors $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ avec

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] = 0.$$

2. Il existe des contractions d'algèbre de Lie qui ne soient pas des contractions d'Inönü-Wigner. Par exemple si nous considérons l'algèbre de Lie résoluble de dimension 4 donnée par

$$[e_1, e_2] = e_2, \ [e_3, e_4] = e_4.$$

cette algèbre peut se contracter sur l'algèbre filiforme suivante :

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4.$$

D'après la proposition précédente, une telle contraction ne peut être une contraction d'Inönü-Wigner.

3. Il existe une notion de contraction d'Inönü-Wigner pour les groupes de Lie. Elle est subordonnée à celle des algèbres de Lie. Ainsi tout groupe de Lie peut se contracter, en ce sens, sur un de ses sous-groupes à un paramètre. Le groupe des rotations de dimension 3 se contracte sur le groupe Euclidien à 2 dimensions. Une contraction du groupe de Lorentz homogène donne le groupe de Galilée en laissant invariant le sous-groupe d'invariance des coordonnées temporelles. De même une contraction du groupe de Lorentz non-homogène donne le groupe de Galilée, en laissant invariant le sous groupe engendré par les rotations spatiales et les déplacements sur le temps. Tous ces exemples sont décrits dans le papier historique d'Inönü-Wigner [23].

6.4 Les contractions de Weimar-Woods

Saletan et Levy-Nahas généralisèrent la notion de contraction d'Inönü-Wigner en considérant
a) Pour Saletan, des familles d'isomorphismes de la forme

$$f_\varepsilon = f_1 + \varepsilon f_2$$

avec $det(f_2) \neq 0$. Ces isomorphismes se réduisent à

$$f_\varepsilon = \varepsilon Id + (1-\varepsilon)g$$

avec $det(g) = 0$. Si q est le nilindex de la aprtie nilpotente de g dans sa décomposition de Jordan, alors e partant d'une algèbre de Lie donnée $\mathfrak{g}$, on la contracte via f_ε pour obtenir une nouvelle algèbre de Lie (si elle existe) $\mathfrak{g}_1$, on contracte à nouveau $\mathfrak{g}_1$ via f_ε et on obtient une nouvelle algèbre de Lie $\mathfrak{g}_2$ ainsi de suite. On définit de la sorte une famille de contractions. Cette suite stationne à l'ordre q, on obtient alors la contractée de Saletan. Notons que la contraction d'Inönü-Wigner correspond à $q = 1$.
b) Pour Levi-Nahas, qui généralise la construction de Saletan , la famille f_ε d'isomorphismes a la forme suivante:

$$f = \varepsilon f_1 + (\varepsilon)^2 f_2,$$

où f_1 et f_2 vérifient les hypothèses de Saletan.

Les contractions de Weimar-Woods sont plus générales et permettent une graduation dans la contraction. On considère dans ce cas des isomorphismes du type

$$f(e_i) = \epsilon^{n_i} e_i$$

où $n_i \in \mathbb{Z}$ et la contraction est donnée lorsque $\epsilon \to 0$. Ce type de contractions peut être considérer comme des contractions généralisées d'Inönü-Wigner avec des exponents entiers. L'intérêt est de pouvoir construire toutes les contractions et de faire le lien avec la notion de déformation que l'on présente dans le paragraphe suivant.

Remarque. R. Hermann introduit aussi une notion de contraction, mais dans ce cas la notion de dimension n'est plus un paramètre fixe.

7 Déformations d'algèbres de Lie

La notion de déformation se veut une notion duale de la notion de contraction. En gros, étant donnée une algèbre de Lie, peut-on déterminer toutes les algèbres de Lie se contractant sur cette algèbre donnée. Ceci revient à déterminer, étant donné un point de L^n toutes les orbites ayant ce point comme point adhérent. Alors que pour la notion de contraction, le fait de pouvoir utiliser le critère de Ségal permettait de regarder le problème dans l'espace vectoriel des constantes de structure muni de la topologie métrique, pour le problème inverse, nous sommes obligés de travailler dans L^n avec la topologie de Zariski. Nous allons donc définir une déformation d'un point de L^n comme un point proche au sens de Zariski de ce point. La notion de point générique va donc jouer un rôle prépondérant pour paramétrer ces points.

7.1 Points génériques dans L^n

Soit $Spec(A(L^n))$ le spectre de l'anneau $A(L^n)$ muni de sa topologie de Zariski Nous savons qu'un point $P \in Spec(A(L^n))$ est fermé si et seulement si l'idéal P est maximal. Dans ce cas l'adhérence du point P est P lui même. On veut généraliser cette situation.

Définition 13 *Soit Z un sous-ensemble fermé irréductible de $Spec(A(L^n))$. Un point $P \in Z$ est dit point générique de Z si Z est égal à l'adhérence du point P. Ceci revient à dire que tout ouvert de Z contient P.*

En particulier si P est un idéal premier, c'est un point générique de l'ensemble $V(P)$ supposé irréductible. Nous allons nous intéresser aux points génériques de $Spec(A(L^n))$ qui appartiennent à des composantes irréductibles de L^n passant par un point représentant une algèbre de Lie donnée et possédant des points génériques. Ces points génériques vont représenter les déformations de l'algèbre donnée. Il existe une manière classique de construire ces points génériques basée sur des notions d'extension. Rappelons tout d'abord le résultat suivant

Lemme 1 *Soit $\mu = (C_{ij}^k)$ un point de la variété affine complexe L^n. Alors pour des extensions finies K de $\mathbb{C}$, il existe des séries entières $C_{ij}^k(t) \in K[[t]]$ telles que $C_{ij}^k(0) = C_{ij}^k$ et le point $(C_{ij}^k(t))$ est un point générique de L^n.*

En particulier, nous pouvons considérer comme point générique des points à coefficients dans l'anneau $\mathbb{C}[[t]]$.

Une autre façon de déterminer les points génériques et d'utiliser une extension non archimédienne de $\mathbb{C}$, appelée l'extension de Robinson. Les adeptes de l'analyse non standard utilise cette extension mais dans un contexte particulier. Ici nous sommes intéressés par cette extension, notée $\mathbb{C}^*$, car elle est munie d'une valuation et son anneau de valuation a des propriétés analogues à l'anneau des séries formelles. De plus cette extension bénéficie d'un principe de transfert ce qui est d'un bénéfice appréciable. Soit donc $\mathbb{C}^*$ une extension non archimédienne de Robinson. C'est un corps valué contenant $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{C}^* - \mathbb{C}$ sont dits non-standard. Il existe un principe de transfert de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{C}^*$ qui peut se résumer en disant que pour vérifier qu'une formule usuelle dépendant de paramètres standard est vraie pour tout x, il suffit de la vérifier pour tout x standard. On notera par A l'anneau de valuation de $\mathbb{C}^*$ qui est muni d'une structure d'algèbre. Comme A est un anneau de valuation, c'est un anneau local (nous reviendrons sur cette définition) et possède donc un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ qui a la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{C}^* - A, x^{-1} \in \mathfrak{m}.$$

Posons $N_1 = \frac{n^3-n^2}{2}$. Pour tout $x \in \mathbb{C}^{N_1}$, soit

$$I_x = \{f \in A(L^n), f(x) = 0.\}$$

C'est un idéal premier de $A(L^n)$ donc un élément de $Spec(A(L^n))$.

Définition 14 *Soit P un élément de $Spec(A(L^n))$. Un élément $x \in \mathbb{C}^{*N_1}$ est dit générique pour P si*

$$f \in P \Longleftrightarrow f(x) = 0.$$

Ceci signifie que $P = I_x$. Il est clair que l'élément $x \in \mathbb{C}^n$ est générique si et seulement si $P = I_x$ est maximal.

7.2 B-Déformations et déformations génériques d'une algèbre de Lie

Soit B une $\mathbb{C}$-algèbre associative unitaire. C'est en particulier un anneau unitaire. Il existe alors un homomorphisme d'anneau unitaire

$$\omega : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$$

donné par $\omega(1) = e$ où e est l'unité de B. Un homomorphisme

$$\epsilon : B \to \mathbb{C}$$

est appelé une augmentation s'il vérifie

$$\epsilon(\omega(a)) = a$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$. Dans ce cas $\overline{B} = Ker\epsilon$ est un idéal de B et les éléments de l'anneau quotient $B/\overline{B}$ sont appelés les indécomposables de B. Par exemple l'anneau $\mathbb{C}[[t]]$ est muni d'une augmentation, elle est définie par $\epsilon(\sum_{n\geq 0} a_n t^n) = a_0$. De même l'anneau de valuation A de l'extension de Robinson est muni d'une augmentation. En effet, par construction, il existe un homomorphisme, appelé dans ce cas ombre,

$$\alpha \in A \to^{\circ} a \in \mathbb{C}$$

ce qui se traduit, dans le langage nonstandard, en disant que tout élément limité, c'est-à-dire non infiniment grand, est infiniment proche d'un unique élément standard appelé son ombre. Rappelons qu'un anneau est dit local s'il possède un unique idéal maximal.

Définition 15 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe et B une $\mathbb{C}$-algèbre munie d'une augmentation. Une B-déformation de $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ sur B telle que $\mathfrak{g}$ soit $\mathbb{C}$-isomorphe à l'algèbre de Lie complexe $\overline{\mathfrak{h}} = \mathbb{C} \otimes_B \mathfrak{h}$.*

Par algèbre de Lie sur l'algèbre B, on entend un B-module muni d'un produit de Lie. Notons que, comme B admet une augmentation, alors $\mathbb{C}$ admet une structure de B-module. Ainsi le produit tensoriel $\mathbb{C}\otimes_B \mathfrak{h}$ est bien défini. La multiplication externe dans $\overline{\mathfrak{h}}$ est donnée par $\alpha(\alpha' \otimes x) = \alpha\alpha' \otimes x$. Si on suppose de plus que $\mathfrak{h}$ soit un B-module libre alors $\mathfrak{h} = B \otimes \mathfrak{g}$. Notons par $\varphi_{\mathfrak{h}}$ l'isomorphisme entre $\overline{\mathfrak{h}}$ et $\mathfrak{g}$. Deux B-déformations $(\mathfrak{h},\varphi_{\mathfrak{h}})$ et $(\mathfrak{h}_1,\varphi_{\mathfrak{h}_1})$ sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme de B-algèbres de Lie $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}_1$ tel que $\overline{\phi} = \varphi_{\mathfrak{h}_1}^{-1} \circ \varphi_{\mathfrak{h}}$ où $\overline{\phi} : \overline{\mathfrak{h}} \to \overline{\mathfrak{h}}_1$ est l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbre de Lie qui se déduit de ϕ. Nous pouvons noter que si B est un anneau local complet , alors il suffit de supposer que ϕ soit un homomorphisme tel que $\overline{\phi} = \varphi_{\mathfrak{h}_1}^{-1} \circ \varphi_{\mathfrak{h}}$ pour que ce soit une équivalence de déformations (c'est-à-dire, ϕ est inversible).

Proposition 2 *Soit $\mathfrak{h}$ une B-déformation de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{h}$ est de type fini sur B si et seulement si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie (sur $\mathbb{C}$)*

A ce stade là, nous avons une définition générale d'une déformation. Bien entendu, le comportement de la déformation dépend fortement des propriétés de l'anneau B. Ici, nous allons nous intéresser maintenant à une classe particulière de B-déformations, le choix de B sera dicté pour qu'une déformation soit un point générique des composantes algébriques de L^n passant par le point correspondant à l'algèbre de Lie donnée.

Définition 16 *Un anneau B est dit un anneau de déformation si B est un anneau de valuation dont le corps résiduel est isomorphe à $\mathbb{C}$. On appelle déformation (valuée) d'une algèbre de Lie complexe, une B-déformation où B est un anneau de déformation. La déformation sera dite générique si elle correspond à un point générique de la variété L^n.*

Notons que tout anneau de déformation est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre. Soit K le corps des fractions de B et soit v la valuation. Alors B correspond aux éléments de K qui ont une valuation positive et l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ correspond aux éléments de valuation strictement positive. Par hypothèse le corps résiduel $B/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$. Ainsi B est muni naturellement d'une augmentation.

Exemples.

- L'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[t]]$ est un anneau de déformations. Ici $\mathfrak{m}$ correspond aux séries formelles sans terme constant. Les déformations correspondantes sont appelées des déformations formelles ou déformations de Gerstenhaber.
- L'anneau des éléments limités $\mathcal{L}$ dans une extension non archimédienne de Robinson. Dans ce cas l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ correspond aux infiniment petits. Les déformations correspondantes sont appelées des perturbations.

Ces deux exemples définissent donc des déformations génériques. Nous allons donc les étudier en détail.

7.3 Déformations formelles

Rappelons que ces déformations sont les $\mathbb{C}[[t]]-$déformations. Les points correspondants dans la variété L^n sont, d'après le début du paragraphe, des points génériques. Rappelons donc la définition de ces déformations. Auparavant, définissons le produit $\circ$ qui à deux formes bilinéaires alternées fait correspondre une forme de degré 3:

$$\varphi \circ \psi(X,Y,Z) = \varphi(\psi(X,Y),Z) + \varphi(\psi(Y,Z),X) + \varphi(\psi(Z,X),X).$$

En particulier si μ est une multiplication d'algèbre de Lie et φ une application bilinéaire alternée, alors

$$\delta_\mu \varphi = \mu \circ \varphi + \varphi \circ \mu$$

et l'identité de Jacobi se résume à $\mu \circ \mu = 0$. Ces produits font partie de la classe des produits de Gerstenhaber.

Théorème 4 *Une déformation formelle d'une algèbre de Lie correspondant au point $\mu_0 \in L^n$ est donnée par une famille $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ d'applications bilinéaires alternées telles que $\varphi_0 = \mu_0$ vérifiant*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0 \circ \mu_0 = 0 \\ \mu_0 \circ \varphi_1 + \varphi_1 \circ \mu_0 = \delta_{\mu_0}\varphi_1 = 0 \\ \varphi_1 \circ \varphi_1 = -\mu_0 \circ \varphi_2 - \varphi_2 \circ \mu_0 = -\delta_{\mu_0}\varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \circ \varphi_p + \sum_{1 \leq i \leq p-1} \varphi_i \circ \varphi_{2p-i} + \varphi_{2p-i} \circ \varphi_i = -\delta_{\mu_0}\varphi_{2p} \\ \sum_{1 \leq i \leq p} \varphi_i \circ \varphi_{2p+1-i} + \varphi_{2p+1-i} \circ \varphi_i = -\delta_{\mu_0}\varphi_{2p+1} \\ \vdots \end{array} \right. .$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que la multiplication μ de la $\mathbb{C}[[t]]-$déformation de μ_0 est entièrement définie par sa restriction à $\mathbb{C}^n$. La $\mathbb{C}[[t]]-$algèbre de Lie de multiplication μ a pour module sous-jacent le module $\mathbb{C}[[t]] \otimes \mathbb{C}^n$. Chaque élément de cette algèbre s'écrit donc comme somme finie d'éléments du type $s(t) \otimes v$, $s(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ et $v \in \mathbb{C}^n$. On en déduit $\mu(s(t) \otimes v, r(t) \otimes w) = s(t)r(t)\mu(v,w)$. Ainsi μ est défini par sa restriction à $\mathbb{C}^n$. On en déduit, que si $v, w \in \mathbb{C}^n$, alors μ s'écrit

$$\mu(v,w) = \mu_0(v,w) + t\varphi_1(v,w) + \ldots + t^p\varphi_p(v,w) + \ldots$$

On écrira donc naturellement μ_t la déformation de μ. L'identité de Jacobi pour la multiplication

$$\mu_t = \sum_{p \geq 0} t^p \varphi_p$$

s'écrit

$$\mu_t \circ \mu_t = \mu_0 \circ \mu_0 + t\delta_{\mu_0}\varphi_1 + t^2(\varphi_1 \circ \varphi_1 + \delta_{\mu_0}\varphi_2) + t^3(\varphi_1 \circ \varphi_2 + \varphi_2 \circ \varphi_1 + \delta_{\mu_0}\varphi_3) + ... = 0$$

ce qui est équivalent au système infini ci-dessus. On s'aperçoit que le premier terme φ_1 de la déformation μ_t de μ_0 appartient à $Z^2(\mu_0, \mu_0)$. Ce terme est appelé la partie infinitésimale de μ_t.

Définition 17 *Une déformation formelle de μ_0 est appelée une déformation linéaire si elle est de longueur 1, c'est-à-dire si elle s'écrit $\mu_t = \mu_0 + t\varphi_1$ o $\varphi_1 \in Z^2(\mu_0, \mu_0)$.*

Pour une telle déformation, on a nécessairement $\varphi_1 \circ \varphi_1 = 0$ soit $\varphi_1 \in L^n$.

Considérons maintenant le problème suivant : soit $\varphi_1 \in Z^2(\mu_0, \mu_0)$ avec $\mu_0 \in L^n$. Est-ce-que cette application est le premier terme d'une déformation de μ_0, autrement dit est-ce la partie infinitésimale d'une déformation? Si c'est le cas, il existe une famille $\varphi_i \in C^2(\mu_0, \mu_0)$, $i \geq 2$, tel que le système (I) soit satisfait. Ce problème d'existence est appelé le problème d'intégration formelle de φ_1 au point μ_0. Comme le système (I) est infini, nous allons essayer de le résoudre par induction. Pour $p \geq 2$, soit (I_p) le sous-système donné par

$$(I_p) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 \circ \varphi_1 = -\delta_{\mu_0}\varphi_2 \\ \varphi_1 \circ \varphi_2 + \varphi_2 \circ \varphi_1 = -\delta_{\mu_0}\varphi_3 \\ \vdots \\ \sum_{1 \leq i \leq [p/2]} a_{i,p}(\varphi_i \circ \varphi_{p-i} + \varphi_{p-i} \circ \varphi_i) = -\delta_{\mu_0}\varphi_p \end{array} \right.$$

avec $a_{i,p} = 1$ si $i \neq p/2$ et $a_{i,p} = 1/2$ si $i = [p/2]$.

Définition 18 *On dit que $\varphi_1 \in Z^2(\mu_0, \mu_0)$ est intégrable jusqu'à l'ordre p s'il existe $\varphi_i \in C^2(\mu_0, \mu_0)$, $i = 2, \cdots, p$ tel que (I_p) soit satisfait.*

Supposons que φ_1 soit intégrable jusqu'à l'ordre p. On montre directement que

$$\sum_{1 \leq i \leq [p+1/2]} a_{i,p+1}(\varphi_i \circ \varphi_{p+1-i} + \varphi_{p+1-i} \circ \varphi_i) \in Z^3(\mu_0, \mu_0).$$

Ainsi φ_1 est intégrable jusqu'à l'ordre $p+1$ si et seulement si cette 3-cochaine est dans $B^3(\mu_0, \mu_0)$. On en déduit

Proposition 8 *Si $H^3(\mu_0, \mu_0) = 0$ alors tout $\varphi_1 \in Z^2(\mu_0, \mu_0)$ est la partie infinitésimale d'une déformation de μ_0.*

La classe de cohomologie $[\sum_{1 \leq i \leq [p+1/2]} a_{i,p+1}(\varphi_i \circ \varphi_{p+1-i} + \varphi_{p+1-i} \circ \varphi_i)]$ est appelé l'obstruction d'ordre $p+1$. L'obstruction d'ordre 2 est donc donnée par la classe de cohomologie de $\varphi_1 \circ \varphi_1$. Elle peut être écrite en utilisant la forme quadratique suivante:

Définition 19 *La forme quadratique de Rim*

$$sq : H^2(\mu_0, \mu_0) \longrightarrow H^3(\mu_0, \mu_0)$$

est définie par

$$sq([\varphi_1]) = [\varphi_1 \circ \varphi_1]$$

pour tout $\varphi_1 \in Z^2(\mu_0, \mu_0)$.

En utilisant cette application, l'obstruction d'ordre 2 s'écrit : $sq([\varphi_1]) = 0$.

Remarque. Dans le paragraphe suivant, nous allons étudier les déformations formelles dans le cadre des déformations valuées (ou génériques). Nous verrons alors que le système infini (I) est équivalent à un système fini ce qui signifie qu'il n'existe qu'un nombre fini d'obstructions.

Déformations formelles équivalentes. Considérons le groupe

$$GL_t(n) = GL(n, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[[t]] = \{u = Id_n + t\phi_1 + t^2\phi_2 + \ldots,\ \phi_i \in gl(n, \mathbb{C})\}$$

la multiplication étant induite par la composition des applications. L'équivalence des déformations se traduit donc ici de la manière suivante : deux déformations $\mu_t = \sum_{p \geq 0} t^p \varphi_p$ et $\mu'_t = \sum_{p \geq 0} t^p \varphi'_p$ de μ sont équivalentes si et seulement si il existe $u \in GL_t(n)$ tel que

$$u \circ (\sum_{p \geq 0} t^p \varphi_p) = (\sum_{p \geq 0} t^p \varphi'_p) \circ (u \otimes u).$$

Exemples

1. Soit μ_0 la multiplication de l'algèbre de Lie nilpotente nilpotente filiforme de dimension n donnée par

$$\mu(X_1, X_i) = X_{i+1}$$

pour $i = 2, .., n-1$. Alors toute algèbre de Lie filiforme de dimension n est isomorphe à une déformation formelle linéaire (Définition 17).

2. Considérons une algèbre de Lie frobéniusienne de dimension $2p$. Au paragraphe précédent, nous avons donné la classification de ces algèbres de Lie à contraction près. Dans [3] on montre qu'une telle multiplication peut s'écrire, à isomorphisme près, sous la forme

$$\mu = \mu_0 + t\varphi_1$$

où μ_0 est une multiplication d'un modèle frobéniusien. Ainsi, toute multiplication d'une algèbre de Lie frobéniusienne de dimension $2p$ est formellement équivalent à une déformation linéaire de la multiplication d'une algèbre de Lie frobéniusienne modèle.

Définition 20 *Une déformation formelle μ_t de μ_0 est dite triviale si elle est équivalente à μ_0.*

Soit $\mu_t^1 = \mu_0 + \sum_{p=1}^{\infty} t^p \varphi_p$ et $\mu_t^2 = \mu_0 + \sum_{t=p}^{\infty} t^p \psi_p$ deux déformations équivalentes de μ_0. Alors $u \circ (\sum_{p\geq 0} t^p \varphi_p) = (\sum_{p\geq 0} t^p \psi_p) \circ (u \otimes u)$. Ceci implique en particulier que, après avoir remplacé u par $Id_n + t\phi_1 + t^2\phi_2 + \dots$,

$$\varphi_1 + \phi_1 \circ \mu_0 = \psi_1 + \mu_0 \circ (\phi_1 \otimes Id + Id \otimes \phi_1)$$

ce qui s'écrit

$$\varphi_1 - \psi_1 \in B^2(\mu_0, \mu_0).$$

Comme $\varphi_1 \in Z^2(\mu_0, \mu_0)$, on en déduit que ψ_1 appartient à la même classe de cohomologie que φ_1. Notons que si φ_1 est nul, cette propriété porte sur le premier terme non nul.

Théorème 5 *L'espace $H^2(\mu_0, \mu_0)$ paramétrise les classes d'équivalence des déformations linéaires des déformations formelles de μ_0.*

Remarque : Déformations et cohomologie. Le résultat précédent fait un lien entre la théorie des déformations et la cohomologie à valeur dans l'algèbre. Cette cohomologie est la cohomologie de Chevalley pour les algèbres de Lie, la cohomologie d'Hochschild dans le cas associatif, etc. Mais il est faut de croire que la théorie des déformations permet de définir une théorie cohomologique (et pourtant ceci se lit assez souvent). La théorie des déformations permet de définir des espaces de degré 1 et 2 qui correspondraient aux espaces H^1 et H^2 si la cohomologie existait. Sinon on est réduit à définir un complexe dont les 3-cochaines sont triviales. Il existe des algèbres ternaires pour lesquelles aucune cohomologie n'est définissable (voir l'article de Nicolas Goze et Elisabeth Remm sur arxiv 0803.0553), la classe des algèbres de Jordan en est un autre exemple et pourtant on sait déformer ces structures.

On déduit du théorème ci-dessus :

Corollaire 2 *If $H^2(\mu_0, \mu_0) = 0$, alors toute déformation formelle de μ_0 est triviale*

Remarque. On peut réduire la notion de déformation formelle en considérant des déformations convergentes. Dans ce cas une telle déformation peut s'écrire ainsi

Définition 21 *Une déformation formelle convergente μ_t de la multiplication μ d'algèbre de Lie est donnée par*

$$\mu_t = \mu_0 + S_1(t)\varphi_1 + S_2(t)\varphi_2 + S_3(t)\varphi_3 + ... + S_p(t)\varphi_p$$

où

1. *$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_p\}$ sont linéairement indépendantes dans $C^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$*
2. *Les $S_i(t)$ sont des séries convergentes de rayon de convergence $r_i > 0$*
3. *Les valuations v_i de $S_i(t)$ satisfont $v_i < v_j$ pour $i < j$.*

Par exemple la déformation formelle

$$\widetilde{\mu_t} = \mu_0 + \sum_{t=1}^{\infty} t^i \varphi_1$$

s'écrit comme une déformation convergente de longueur 1

$$\mu_t = \mu_0 + t\frac{1 - t^n}{1 - t}\varphi_1$$

Nous étudierons plus généralement ces déformations dans le cadre des déformations valuées.

7.4 Perturbations d'algèbres de Lie

Cette notion de déformation est peut être la plus proche de ce concept. En effet elle est basée sur une extension non archimédienne de Robinson et permet d'utiliser le langage de la mathématique non standard. Ainsi, sous ce point de vue une perturbation d'une algèbre de Lie sera une algèbre de Lie de même dimension dont les constantes de structure sont infiniment proche de l'algèbre initiale. Sans aucun doute, on a ici, un concept de déformation qui traduit parfaitement l'idée même de déformation. De plus, dans une telle extension, une déformation apparaît comme un point générique de la composante algébrique contenant le point associée à l'algèbre de Lie donnée. Comme nous verrons que toutes ces notions de déformations génériques sont conceptuellement équivalentes, nous pouvons utiliser n'importe quelle parmi ces déformations. L'intérêt des perturbations est de présenter un cadre calculatoire très pratique. Enfin, dans une telle extension nous avons un principe de transfert. Rappelons dans un premier temps les propriétés de cette extension.

Soit $\mathbb{C}^*$ une extension de Robinson de $\mathbb{C}$. C'est un corps valué non archimédien. Si on note A son algèbre de valuation et $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, alors on a

$$x \in \mathbb{C}^* - A \Longleftrightarrow x^{-1} \in \mathfrak{m}.$$

Ceci est en fait la définition d'une algèbre de valuation. Dans ce contexte, on appelle infiniment petits les éléments de $\mathfrak{m}$, limités les élements de A et infiniment grands les éléments de $\mathbb{C}^* - A$. Les opérations algébriques sur ces éléments correspondent parfaitement à celles que l'on met sur ce type d'éléments en analyse. Le corps résiduel $A/\mathfrak{m}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. On note pour tout $x \in A$ sa classe par ${}^\circ x$. On a un homomorphisme naturel d'anneaux $\mathbb{C} \rightarrow A$ et l'application $x \in A \rightarrow^\circ x \in \mathbb{C}$ est une augmentation. Si on appelle standard un élément de $\mathbb{C}^*$ appartenant à $\mathbb{C}$, l'augmentation se traduit en disant que tout élément limité est infiniment proche d'un unique élément standard et que tous les infiniment petis sont infiniment proches de 0. Nous pouvons étendre toutes ces notions à $\mathbb{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit μ_0 un point de L^n.

Définition 22 *Une perturbation μ of μ_0 est une A-déformation de μ_0 telle que*

$$\mu(X,Y) - \mu_0(X,Y) \in \mathfrak{m}^n$$

pour tout $X, Y \in \mathbb{C}^n$.

Le résultat essentiel se résume en disant que toute perturbation admet une décomposition canonique finie. Plus précisément on a :

Théorème 6 *Soit μ_0 un point de L^n et μ une perturbation of μ_0. Il existe un entier k et des éléments $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_k \in \mathfrak{m}$ tels que pour tout $X, Y \in \mathbb{C}^n$ on ait*

$$\mu(X,Y) = \mu_0(X,Y) + \epsilon_1\phi_1(X,Y) + \epsilon_1\epsilon_2\phi_2(X,Y) + \cdots + \epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_k\phi_k(X,Y)$$

où les ϕ_i sont des applications bilinéaires alternées sur $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ linéairement indépendantes.

L'intérêt d'une telle décomposition est appréciable. En effet, alors que dans le cadre des déformations formelles l'identité de Jacobi relative à la déformation se traduit sur un système infini portant sur les applications φ_i, la même identité est équivalente dans le cadre des pertubations à un système fini formellent résolvable. Comme nous verrons qu'il y a équivalence entre les deux notions de déformations, on en déduit

Le système infini (I) (théorème 4) de Gerstenhaber est équivalent à un nombre fini de systèmes finis.

En particulier, le premier terme d'une perturbation est toujours dans l'espace $Z^2(\mu_0, \mu_0)$. Nous verrons tout cela dans le paragraphe qui suit. Une étude spécifique des perturbations est faite dans [14]

7.5 Déformations valuées ou déformations génériques

7.5.1 Une décomposition canonique dans $\mathfrak{m}^k$

Rappelons rapidement ce qu'est un anneau de valuation. Soit $\mathbb{F}$ un corps commutatif et A un sous anneau de $\mathbb{F}$. On dit que A est un anneau de valuation de $\mathbb{F}$ si A est un anneau local intègre tel que:

$$\text{Si } x \in \mathbb{F} - A, \quad \text{alors} \quad x^{-1} \in \mathfrak{m}.$$

où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A. Un anneau A est appelé anneau de valuation si c'est un anneau de valuation de son corps de fractions. Par exemple si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique 0, alors l'anneau des séries formelles $\mathbb{K}[[t]]$ est un anneau de valuation alors que l'anneau $\mathbb{K}[[t_1, t_2]]$ de deux ou plus indéterminées ne l'est pas.

Soit $\mathfrak{m}^2$ le produit cartésien $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$. Soit $(a_1, a_2) \in \mathfrak{m}^2$ avec $a_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.
i) Supposons $a_1.a_2^{-1} \in A$. Soit $\alpha = \pi(a_1.a_2^{-1})$ où π est la projection canonique dans $A/\ \mathfrak{m}$. Rappelons que nous avons un morphisme naturel $\omega : \mathbb{K} \to A$ qui permet d'identifier α avec $s(\alpha)$ dans A. Alors

$$a_1.a_2^{-1} = \alpha + a_3$$

avec $a_3 \in \mathfrak{m}$. Si $a_3 \neq 0$,

$$(a_1, a_2) = (a_2(\alpha + a_3), a_2) = a_2(\alpha, 1) + a_2 a_3(0, 1).$$

Si $\alpha \neq 0$ on peut écrire aussi

$$(a_1, a_2) = aV_1 + abV_2$$

avec $a, b \in \mathfrak{m}$ et V_1, V_2 sont linéairement indépendants dans $\mathbb{K}^2$. Si $\alpha = 0$, alors $a_1.a_2^{-1} \in \mathfrak{m}$ et $a_1 = a_2 a_3$. On a

$$(a_1, a_2) = (a_2 a_3, a_2) = ab(1, 0) + a(0, 1).$$

Ainsi dans ce cas, $V_1 = (0, 1)$ et $V_2 = (1, 0)$. Si $a_3 = 0$, alors $a_1 a_2^{-1} = \alpha$ et $(a_1, a_2) = a_2(\alpha, 1) = aV_1$.Ceci correspond à la décomposition précédent mais pour $b = 0$.
ii) Si $a_1.a_2^{-1} \in \mathbb{F} - A$, alors $a_2.a_1^{-1} \in \mathfrak{m}$. Dans ce cas on pose $a_2.a_1^{-1} = a_3$ et on obtient

$$(a_1, a_2) = (a_1, a_1.a_3) = a_1(1, a_3) = a_1(1, 0) + a_1 a_3(0, 1)$$

avec $a_3 \in \mathfrak{m}$. On obtient dans ce cas la décomposition :

$$(a_1, a_2) = aV_1 + abV_2$$

avec $a, b \in \mathfrak{m}$ et V_1, V_2 linéairement indépendants dans $\mathbb{K}^2$. Cette décomposition se généralise facilement pour un point de $\mathfrak{m}^k$. Ceci s'écrit :

Théorème 7 *Pour tout point $(a_1, a_2, ..., a_k) \in \mathfrak{m}^k$ il existe h ($h \leq k$) et h-vecteurs linéairement indépendants $V_1, V_2, .., V_h$ de l'espace $\mathbb{K}^k$ et $b_1, b_2, .., b_h \in \mathfrak{m}$ tels que*

$$(a_1, a_2, ..., a_k) = b_1V_1 + b_1b_2V_2 + ... + b_1b_2...b_hV_h.$$

Le paramètre h qui apparaît dans cette décomposition est appelée la longueur de la décomposition. Il peut être inférieur à k. Il correspond à la dimension du plus petit $\mathbb{K}$-espace vectoriel V tel que $(a_1, a_2, ..., a_k) \in V \otimes \mathfrak{m}$. Si les coordonnées a_i du vecteur $(a_1, a_2, ..., a_k)$ sont dans A et pas nécessairement dans l'idéal maximal, on écrit alors $a_i = \alpha_i + a'_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{K}$ et $a'_i \in \mathfrak{m}$, et on décompose

$$(a_1, a_2, ..., a_k) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) + (a'_1, a'_2, ..., a'_k).$$

On applique alors le théorème ci-dessus au vecteur $(a'_1, a'_2, ..., a'_k)$.

Cette décomposition est unique au sens suivant :

Théorème 8 *Soit $b_1V_1 + b_1b_2V_2 + ... + b_1b_2...b_hV_h$ et $c_1W_1 + c_1c_2W_2 + ... + c_1c_2...c_sW_s$ deux décompositions du vecteur $(a_1, a_2, ..., a_k)$. Alors*
i. $h = s$,
ii. Le drapeau engendré par la famille libre $(V_1, V_2, .., V_h)$ est égal au drapeau engendré par la famille libre $(W_1, W_2, ..., W_h)$ c'est-à-dire $\forall i \in 1, .., h$

$$\{V_1, ..., V_i\} = \{W_1, ..., W_i\}$$

où $\{U_i\}$ désigne l'espace engendré par les vecteurs U_i.

Pour la démonstration, on pourra se référer à [20]. Nous allons appliquer cette décomposition à une déformation valuée.

7.5.2 Décomposition d'une déformation valuée

Ceci étant, soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie et A une $\mathbb{K}$-algèbre commutative unitaire de valuation. Supposons que son corps résiduel $A/\mathfrak{m}$ soit isomorphe à $\mathbb{K}$ Dans ce cas on a une augmentation naturelle. Soit $\mathfrak{g}_A = \mathfrak{g} \otimes A$ une A-déformation de $\mathfrak{g}$. Si $dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ est fini, alors

$$dim_A(\mathfrak{g}_A) = dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}).$$

Comme A est aussi une $\mathbb{K}$-algèbre, on identifiera $\mathfrak{g}$ au sous espace $\mathfrak{g} \otimes e$ de $\mathfrak{g}_A$. En particulier on a si $\mu_{\mathfrak{g}_A}$ désigne la multiplication de $\mathfrak{g}_A$ et $\mu_{\mathfrak{g}}$ celle de $\mathfrak{g}$, alors $\mu_{\mathfrak{g}_A}(X, Y) - \mu_{\mathfrak{g}}(X, Y)$ appartient au quasi-module $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}$ pour tout $X, Y \in \mathbb{K}^n$. Les déformations formelles de Gerstenhaber et les perturbations sont des

déformations valuées. Supposons que $\mathfrak{g}$ soit de dimension finie et soit $\{X_1, ..., X_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$. On a alors

$$\mu_{\mathfrak{g}_A}(X_i, X_j) - \mu_{\mathfrak{g}}(X_i, X_j) = \sum_k C_{ij}^k X_k$$

avec $C_{ij}^k \in \mathfrak{m}$. Cette différence apparaît donc comme un vecteur de $\mathfrak{m}^{n^2(n-1)/2}$ ayant pour composantes les C_{ij}^k. La décomposition canonique s'écrit alors

$$\begin{array}{rcl} \mu_{\mathfrak{g}_A}(X_i, X_j) - \mu_{\mathfrak{g}}(X_i, X_j) & = & \epsilon_1\phi_1(X_i, X_j) + \epsilon_1\epsilon_2\phi_2(X_i, X_j) \\ & & +... + \epsilon_1\epsilon_2...\epsilon_k\phi_k(X_i, X_j) \end{array}$$

avec $\epsilon_s \in \mathfrak{m}$ et $\phi_1, ..., \phi_l : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ linéairement indépendantes. Cette décomposition est en particulier valable si $A = \mathbb{C}[[t]]$. Nous pouvons donc réduire le système infini d'intégrabilité de Gerstenhaber à un système fini. Rappelons tout d'abord que le complexe de Chevalley-Eilenberg est un complexe différentiel gradué. Le crochet gradué est défini à partir des produits $\circ$ donnés par

$$(g_q \circ f_p)(X_1, ..., X_{p+q}) = \sum (-1)^{\epsilon(\sigma)} g_q(f_p(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(p)}), X_{\sigma(p+1)}, ..., X_{\sigma(q)})$$

où σ est une permutation de $1, ..., p+q$ telle que $\sigma(1) < ... < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < ... < \sigma(p+q)$ (c'est un (p,q)-schuffle) et $g_q \in \mathcal{C}^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ et $f_p \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Le crochet gradué est alors donné par

$$[f, g] = f \circ g - (-1)^{p-1} g \circ f.$$

La condition de Jacobi relative à $\mu_{\mathfrak{g}_A}$ se résume à $\mu_{\mathfrak{g}'_A} \circ \mu_{\mathfrak{g}'_A} = 0$. Ceci donne

$$(\mu_{\mathfrak{g}} + \sum_{i \in I} \epsilon_1\epsilon_2...\epsilon_i\phi_i) \circ (\mu_{\mathfrak{g}} + \sum_{i \in I} \epsilon_1\epsilon_2...\epsilon_i\phi_i) = 0. \qquad (1)$$

Comme $\mu_{\mathfrak{g}} \circ \mu_{\mathfrak{g}} = 0$, cette équation se réduit à :

$$\epsilon_1(\mu_{\mathfrak{g}} \circ \phi_1 + \phi_1 \circ \mu_{\mathfrak{g}}) + \epsilon_1 U = 0$$

où $U \in \mathcal{C}^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{m}$. Simplifions par ϵ_1 qui est supposé non nul, sinon la déformation est triviale :

$$(\mu_{\mathfrak{g}} \circ \phi_1 + \phi_1 \circ \mu_{\mathfrak{g}})(X, Y, Z) + U(X, Y, Z) = 0$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Comme $U(X, Y, Z) \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}$ et que le premier terme est dans $\mathfrak{g}$, on en déduit

$$(\mu_{\mathfrak{g}} \circ \phi_1 + \phi_1 \circ \mu_{\mathfrak{g}})(X, Y, Z) = 0.$$

Or $\mu_{\mathfrak{g}} \circ \phi_1 + \phi_1 \circ \mu_{\mathfrak{g}}$ n'est rien d'autre que $\delta_\mu\phi_1$ où δ_μ est l'opérateur cobord de la cohomologie de Chevalley de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On retrouve donc, dans le cadre des déformations valuées le résultat classique de Gerstenhaber :

$$\delta_\mu\phi_1 = 0.$$

Regardons maintenant les équations données par $U = 0$. Elles vont s'écrire à l'aide du crochet gradué sur l'espace des cochaines rappelé ci-dessus. En particulier, on a si $\phi_i, \phi_j \in \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$:

$$[\phi_i, \phi_j] = \phi_i \circ \phi_j + \phi_j \circ \phi_i$$

et $[\phi_i, \phi_j] \in \mathcal{C}^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

Théorème 9 *Soit*

$$\mu_{\mathfrak{g}_A} = \mu_{\mathfrak{g}} + \sum_{i \in I} \epsilon_1 \epsilon_2 ... \epsilon_i \phi_i$$

une déformation valuée de longueur k. *Alors les 3-cochaines* $[\phi_i, \phi_j]$ *et* $[\mu, \phi_i]$, $1 \leq i, j \leq k-1$, *engendrent un sous espace vectoriel* V *de* $\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ *de dimension inférieure ou égale à* $k(k-1)/2$ *et* $\mu_{\mathfrak{g}_A} \circ \mu_{\mathfrak{g}_A} = 0$ *est équivalent à*

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\phi_1 = 0 \\ \delta\phi_2 = a_{11}^2 [\phi_1, \phi_1] \\ \delta\phi_3 = a_{12}^3 [\phi_1, \phi_2] + a_{22}^3 [\phi_1, \phi_1] \\ ... \\ \delta\phi_k = \sum_{1 \leq i \leq j \leq k-1} a_{ij}^k [\phi_i, \phi_j] \\ [\phi_1, \phi_k] = \sum_{1 \leq i \leq j \leq k-1} b_{ij}^1 [\phi_i, \phi_j] \\ .... \\ [\phi_{k-1}, \phi_k] = \sum_{1 \leq i \leq j \leq k-1} b_{ij}^{k-1} [\phi_i, \phi_j] \end{array} \right.$$

Démonstration. Soit V le sous-espace de $\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ engendré par les applications $[\phi_i, \phi_j]$ et $[\mu, \phi_i]$. Si ω est une forme linéaire sur V dont le noyau contient les vecteurs $[\phi_i, \phi_j]$ pour $1 \leq i, j \leq (k-1)$, alors l'équation (1) donne:

$$\epsilon_1 \epsilon_2 ... \epsilon_k \omega([\phi_1, \phi_k]) + \epsilon_1 \epsilon_2^2 ... \epsilon_k \omega([\phi_2, \phi_k]) + ... + \epsilon_1 \epsilon_2^2 ... \epsilon_k^2 \omega([\phi_k, \phi_k]) + \epsilon_2 \omega([\mu, \phi_2])$$

$$+ \epsilon_2 \epsilon_3 \omega([\mu, \phi_3]) ... + \epsilon_2 \epsilon_3 ... \epsilon_k \omega([\mu, \phi_k]) = 0.$$

Comme chacun des coefficients est dans l'idéal $\mathfrak{m}$, on a nécessairement

$$\omega([\phi_1, \phi_k]) = ... = \omega([\phi_k, \phi_k]) = \omega([\mu, \phi_2]) = ... = \omega([\mu, \phi_k]) = 0$$

et ceci pour toute forme linéaire dont le noyau contient V. Le système du théorème correspond aux relations de dépendances dans V et au fait que

$$\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^{(2)} \supset ... \supset \mathfrak{m}^{(p)} ...$$

où $\mathfrak{m}^{(p)}$est l'idéal engendré par les produits $a_1 a_2 ... a_p, \ a_i \in \mathfrak{m}$ de longueur p.

Cas particulier : dim V=$k(k-1)/2$

Supposons que la dimension de V soit maximum et égale à $(k-1)/2$. Nous allons voir que dans ce cas la déformation est isomorphe à une $\mathbb{C}[t]-$déformation.

Proposition 9 *Soit* $\mu_{\mathfrak{g}_A}$ *une A-déformation de* $\mu_{\mathfrak{g}}$ *de longueur* k *telle que dim*$V = k(k-1)/2$. *Elle est alors équivalente à une déformation polynomiale vérifiant*

$$\mu_t(X, Y) = \mu_{\mathfrak{g}}(X, Y) + \sum_{i=1,..,k} t^i \phi_i(X, Y)$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. Considérons l'équation

$$\mu_{\mathfrak{g}_A} \circ \mu_{\mathfrak{g}_A} = 0.$$

Comme dim$V$=$k(k-1)/2$, il existe des polynômes $P_i(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degré i tels que

$$\epsilon_i = a_i \epsilon_k \frac{P_{k-i}(\epsilon_k)}{P_{k-i+1}(\epsilon_k)}$$

avec $a_i \in \mathbb{K}$. On a alors

$$\mu_{\mathfrak{g}'_A} = \mu_{\mathfrak{g}_A} + \sum_{i=1,\ldots,k} a_1 a_2 \ldots a_i (\epsilon_k)^i \frac{P_{k-i}(\epsilon_k)}{P_k(\epsilon_k)} \phi_i.$$

Ainsi

$$P_k(\epsilon_k)\mu_{\mathfrak{g}'_A} = P_k(\epsilon_k)\mu_{\mathfrak{g}_A} + \sum_{i=1,\ldots,k} a_1 a_2 \ldots a_i (\epsilon_k)^i P_{k-i}(\epsilon_k)\phi_i.$$

Le résultat se déduit en écrivant cette expression suivant les puissances croissantes. □

Notons que pour une telle déformation, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\varphi_2 + [\varphi_1, \varphi_1] = 0 \\ \delta\varphi_3 + [\varphi_1, \varphi_2] = 0 \\ \ldots \\ \delta\varphi_k + \sum_{i+j=k} [\varphi_i, \varphi_j] = 0 \\ \sum_{i+j=k+s} [\varphi_i, \varphi_j] = 0. \end{array} \right.$$

8 Algèbres de Lie rigides

La notion de rigidité est une notion topologique. Nous pourrons la relier naturellement à celle de déformation lorsque ces déformations seront génériques. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension n. On la considère comme un point μ de la variété algébrique L^n munie de sa topologie de Zariski.

Définition 23 *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est rigide si l'orbite $\mathcal{O}(\mu)$ est Zariski ouverte dans L^n.*

Dans ce cas, l'adhérence de l'orbite $\overline{\mathcal{O}(\mu)}$ est une composante algébrique connexe de L^n. On en déduit immédiatement, comme toute variété algébrique complexe est réunion d'un nombre fini de composantes algébriques connexes, qu'il n'existe qu'un nombre fini de classe d'isomorphie d'algèbres de Lie rigides de dimension n. Le théorème suivant, que nous ne démontrons pas ici, permet de mettre en évidence certaines algèbres de Lie rigides.

Théorème 10 *Théorème de Nijenhuis-Richardson. Soit $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ une algèbre de Lie de dimension n. Si le deuxième groupe $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ de la cohomologie de Chevalley est nul, alors $\mathfrak{g}$ est rigide.*

Ainsi, toute algèbre de Lie semi-simple complexe est rigide. Mais la réciproque du théorème de Nijenhuis-Richardson est fausse. Considérons en effet l'algèbre de Lie de dimension 11 définie dans la base $\{X, X_0, X_1, \ldots, X_9\}$ par,

$$\begin{cases} \mu(X, X_i) = iX_i, \quad i = 0, \ldots, 9 \\ \mu(X_0, X_i) = X_i, \quad i = 4, 5, \ldots, 9 \\ \mu(X_1, X_i) = X_{i+1}, \quad i = 2, 4, 5, 6, 7, 8 \\ \mu(X_2, X_i) = X_{i+2}, \quad i = 4, 5, 6, 7. \end{cases}$$

On montre, soit par un calcul direct utilisant la suite d'Hochschild-Serre, soit en utilisant un calcul sur ordinateur (un programme est donné dans le livre [18], basé sur Mathematica) que la dimension de $H^2(\mu, \mu)$ est égale à 1. Quant à la rigidité, elle est montrée (voir toujours [18]) en utilisant le résultat suivant:

Théorème 11 *Soit $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ une algèbre de Lie complexe de dimension n. Alors $\mathfrak{g}$ est rigide si et seulement si toute perturbation lui est isomorphe.*

Démonstration. En effet, toute perturbation de $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ est un point générique de la composante algébrique passant par le point μ. Réciproquement, si toutes les perturbations de $\mathfrak{g}$ sont isomorphes à $\mathfrak{g}$, son orbite est ouverte et $\mathfrak{g}$ est rigide. D'où le résultat.

Le résultat précédent se généralise naturellement aux déformations génériques. Ainsi

Théorème 12 *Soit $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ une algèbre de Lie complexe de dimension n. Alors $\mathfrak{g}$ est rigide si et seulement si toute déformation valuée lui est isomorphe.*

Remarque : L'existence d'algèbres de Lie rigides de dimension n dont le $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ est non nul implique que le schéma $\mathcal{L}^n$ associé à la variété L^n n'est pas réduit.

Nous allons nous intéresser à présent à la classification des algèbres de Lie rigides. Cette classification est loin d'être achevée. En particulier on ne sait rien sur la rigidité éventuelle d'algèbres de Lie nilpotentes. On peut raisonnablement conjecturer le résultat suivant

Conjecture : *Il n'existe pas d'algèbres de Lie nilpotentes rigides.*

Afin de dresser une éventuelle classification des algèbres de Lie rigides, nous devons commencer par comprendre la structure de ces algèbres. Pour cela nous devons revenir sur l'étude des algèbres de Lie algébriques.

Définition 24 *Une algèbre de Lie réelle ou complexe $\mathfrak{g}$ est appelée algébrique si elle est isomorphe à l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie algébrique.*

Un groupe de Lie linéaire algébrique complexe est un sous-groupe de Lie d'un groupe $GL(p,\mathbb{C})$ défini comme l'ensemble des zéros d'un système fini de relations polynomiales. C'est donc une variété algébrique mais avec la propriété surprenante que dans ce cas il n'existe aucun point singulier. C'est donc bien une variété différentielle.

Exemples.

1. Toute algèbre de Lie simple complexe est algébrique.
2. Toute algèbre de Lie nilpotente est algébrique. Plus généralement, toute algèbre de Lie dont le radical est nilpotent est algébrique.
3. Toute algèbre de Lie complexe de dimension n dont l'algèbre de Lie des dérivations est aussi de dimension n est algébrique.
4. Toute algèbre de Lie vérifiant $\mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ est algébrique.

La famille des algèbres de Lie algébrique est donc vaste et nous n'avons pas de classification précise de cette classe. Par contre, le résultat suivant donne la structure précise de ces algèbres:

Proposition 10 *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. $\mathfrak{g}$ *est algébrique.*

2. $ad(\mathfrak{g}) = \{ad_\mu X, X \in \mathfrak{g}\}$ *est algébrique.*

3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{t}$ *où* $\mathfrak{s}$ *est une sous-algèbre semi-simple de Levi,* $\mathfrak{n}$ *le nilradical c'est-à-dire le plus grand idéal nilpotent et* t *un tore de Malcev tel que* $ad_\mu \mathfrak{t}$ *soit algébrique.*

Cette proposition fait apparaître le tore externe de Malcev. Par définition, un tore externe de Malcev $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie abélienne telle que tous les endomorphismes adX, $X \in \mathfrak{t}$ soient semi-simple (simultanément diagonalisables). Tous les tores de Malcev maximaux (pour l'inclusion) sont conjugués. Leur dimension commune est appelée le rang de $\mathfrak{g}$.

Revenons aux algèbres de Lie rigides. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie rigide dans L^n. Son orbite est ouverte. On en déduit que tout déformation générique lui est isomorphe. Si $\mathfrak{g}'$ est une telle déformation (par exemple une perturbation), alors c'est un point générique de la composante définie par l'orbite de $\mathfrak{g}$ (rappelons que l'adhérence de l'orbite d'une algèbre rigide est une composante algébrique de la variété L^n). Or cette composante est définie par l'action du groupe algébrique $GL(n,\mathbb{C})$. C'est l'adhérence de l'image de $\mathfrak{g}'$ par cette action. Comme cette action est définie par des équations polynomiales et que la composante est également donnée par un système d'équations polynomiales, on en déduit immédiatement que le point générique est algébrique. Comme il est isomorphe à $\mathfrak{g}$, cette algèbre est aussi algébrique.

Proposition 11 *Toute algèbre de Lie complexe rigide dans* L^n *est algébrique.*

Supposons que $\mathfrak{g}$ soit résoluble. Si elle est rigide, elle se décompose donc sous la forme

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$$

où $\mathfrak{t}$ est un tore de Malcev et $\mathfrak{n}$ le nilradical. Reprenons ici l'étude faite dans [1] et [17] permettant de donner une description précise des algèbres résolubles rigides et leur classification lorsque le nilradical est filiforme.

Définition 25 *Soit* $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$ *une algèbre de Lie résoluble rigide de multiplication* μ. *Un vecteur* $X \in \mathfrak{t}$ *est dit régulier si la dimension de l'espace*

$$V_0(X) = \{Y \in \mathfrak{g},\ \mu(X,Y) = 0\}$$

est minimale c'est-à-dire $dimV_0(X) \leq dimV_0(Z)$ *pour tout* $Z \in \mathfrak{t}$.

Supposons que $\mathfrak{g}$ ne soit pas nilpotente. Dans ce cas $\mathfrak{t}$ n'est pas trivial. Soit X un vecteur régulier et posons $p = \dim V_0(X)$. Considérons une base $\{X, Y_1, \ldots, Y_{n-p}, X_1, \ldots, X_{p-1}\}$ de vecteurs propres de adX (qui par hypothèse est diagonalisable) telle que $\{X, X_1, \ldots, X_{p-1}\}$ soit une base de $V_0(X)$ et $\{Y_1, \ldots, Y_{n-p}\}$ une base du nilradical $\mathfrak{n}$. On suppose également que $\{X, X_{k_0+1}, \ldots, X_{p-1}\}$ soit une base de $\mathfrak{t}$. On notera par (S) le système de racines associé à adX. Il est défini par

$$\left\{\begin{array}{ll} x_i + x_j = x_k & \text{si la composante de } \mu(X_i, X_j) \text{ sur } X_k \text{ est non nulle} \\ y_i + y_j = y_k & \text{si la composante de } \mu(Y_i, Y_j) \text{ sur } Y_k \text{ est non nulle} \\ x_i + y_j = y_k & \text{si la composante de } \mu(X_i, Y_j) \text{ sur } Y_k \text{ est non nulle} \\ y_i + y_j = x_k & \text{si la composante de } \mu(Y_i, Y_j) \text{ sur } X_k \text{ est non nulle} \end{array}\right.$$

Théorème 13 *Si* $rang(S) \neq dim(\mathfrak{n}) - 1$, *alors* $\mathfrak{g}$ *n'est pas rigide.*

La démonstartion est donnée dans [1]. Les conséquences sont nombreuses:

Corollaire 3 *Si* $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$ *est rigide, alors*

- $\mathfrak{t}$ *est un tore de Malcev maximal.*
- *Il existe un vecteur régulier* $X \in \mathfrak{t}$ *tel que les valeurs propres de* adX *soit entières.*
- *Le nilradical est défini par une solution isolée du système polynomial de Jacobi défini par les racines.*

Notons que la deuxième condition n'implique pas que l'algèbre de Lie rigide soit rationnelle. Il existe en effet des exemples d'algèbres rigides non rationnelles. La troisième propriété signifie que, une fois données les racines de adX, les constantes de structure de n sont données par des conditions (réduites) de Jacobi. L'algèbre est rigide si le nilradical correspond à une solution isolée.

Comme conséquence, signalons la classification des algèbres de Lie rigides résolubles de dimension inférieure ou égale à 8 (voir [17]) et la classification générale des algèbres de Lie résolubles dont le nilradical est filiforme (voir aussi [17]).

Partie III

Structures géométriques sur les algèbres de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle ou complexe de dimension finie. Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Les éléments de $\mathfrak{g}$ sont donc les champs de vecteurs invariants à gauche sur G et le dual vectoriel $\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)$ de $\mathfrak{g}$ est l'espace des formes de Pfaff invariantes à gauche sur G. Rappelons que si $\{X_1, \dots X_n\}$ est une base de $\mathfrak{g}$ et si $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ en est la base duale de $\mathfrak{g}^*$, alors les équations de Maurer-Cartan sont données à partir de

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k X_k$$

par

$$d\omega_k = \sum_{1 \leq i < j \leq n} C_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j$$

où d est la différentielle extérieure des formes invariantes à gauche sur G. Si $\Lambda(\mathfrak{g}^*) = \oplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^p(\mathfrak{g}^*)$ est l'algèbre extérieure sur $\mathfrak{g}^*$, cette différentielle est donc un morphisme gradué de degré 1 :

$$d : \Lambda^p(\mathfrak{g}^*) \rightarrow \Lambda^{p+1}(\mathfrak{g}^*).$$

Nous la considèrerons donc de manière équivalente, soit comme une différentielle soit comme un morphisme linéaire gradué.

Les structures géométriques que nous allons aborder dans ce qui suit seront définies sur les algèbres de Lie. Elles correspondent en fait à des structures géométriques invariantes à gauche sur G. On s'intéerssera souvent au cas où l'algèbre de Lie est nilpotente. En effet dans ce cas, si cette algèbre est rationnelle, c'est-à-dire si elle admet une base par rapport à laquelle les constantes de structure sont rationnelles, alors le groupe de Lie nilpotent simplement connexe et connexe associé admet un sous-groupe discret Γ tel que le quotient G/Γ soit une variété différentielle compacte appelée nilvariété. Les structures définies sur $\mathfrak{g}$ correspondant à des structures invariantes à gauche sur G, donnent des structures différentiables analogues sur la variété compacte G/Γ dès que ces structures sont invariantes à droite par Γ.

9 Structures symplectiques

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle (ou complexe) de dimnsion $2n$. Une structure symplectique sur $\mathfrak{g}$ est donnée par une $2-$forme ω vérifiant

$$\begin{cases} d\omega = 0 \\ \omega^n \neq 0 \end{cases}$$

où $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (n fois) et

$$d\omega(X, Y, Z) = \omega(X, [Y, Z]) + \omega(Y, [Z, X]) + \omega(Z, [X, Y])$$

la multiplication de $\mathfrak{g}$ est notée ici comme en géométrie différentielle par le crochet. Les algèbres de Lie frobéniusiennes sont munies d'une structure symplectique. En effet si $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ vérifie $(d\alpha)^n \neq 0$, alors $\omega = d\alpha$ est une forme symplectique (dite exacte). Le problème d'existence d'une structure symplectique sur une algèbre de Lie est toujours d'actualité. Par exemple, d'après [16], il n'existe pas de structure frobéniusienne sur une algèbre de Lie nilpotente. En effet, dans ce cas le centre de $\mathfrak{g}$ est au moins de dimension 1, et tout vecteur du centre est dans le noyau de $d\alpha$. La forme $\omega = d\alpha$ est donc dégénérée et ne peut vérifier $\omega^n \neq 0$. Toutefois la classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 6 munie d'une structure symplectique est connue. On peut la consulter dans [18]

Il existe un procédé de construction des algèbres de Lie munies d'une forme symplectique, appelé le procédé de double extension et défini par Alberto Medina et Philippe Revoy. Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une algèbre de Lie munie d'une forme symplectique. On dira que l'algèbre est symplectique. Alors le produit $\circledast$ défini par

$$\omega(X \circledast Y, Z) = -\omega(Y, [X, Z])$$

correspondant à l'adjoint pour la forme non dégénérée ω de l'application linéaire adX est un produit symétrique gauche

$$(X \circledast Y) \circledast Z - X \circledast (Y \circledast Z) = (Y \circledast X) \circledast Z - Y \circledast (X \circledast Z)$$

tel que

$$X \circledast Y - Y \circledast X = [X, Y]$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. On dit alors que $\mathfrak{g}$ est munie d'une structure affine, structure que l'on va étudier deux paragraphes plus loin. Soit D une dérivation de $\mathfrak{g}$. Alors l'application bilinéaire f sur $\mathfrak{g}$ donnée par

$$f(X, Y) = \omega(D(X), Y) + \omega(X, D(Y))$$

est un 2-cocycle pour la cohomologie scalaire de $\mathfrak{g}$. Elle permet donc de définir une extension centrale $E = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}e$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en posant

$$[X + \lambda e, Y + \beta e]_E = [X, Y] + f(X, Y)e.$$

On vérifie aisément que ceci est un crochet de Lie sur E, que e est dans le centre de E et $\dim E = \dim \mathfrak{g} + 1$. Considérons à présent l'application bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ donnée par

$$\Omega(X, Y) = \omega(((D + D^*) \circ D + D^* \circ (D + D^*))(X), Y)$$

où D^* est l'application adjointe de D par rapport à la forme non dégénérée ω. Cette application appartient à $Z^2(\mathfrak{g},\mathbb{K})$. Supposons que $\Omega \in B^2(\mathfrak{g},\mathbb{K})$. Il existe alors $Z_\Omega \in \mathfrak{g}$ tel que

$$\Omega(X, Y) = \omega(Z_\Omega, [X, Y])$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$. Définissons alors la dérivation D_1 de l'algèbre de Lie E en posant

$$\begin{array}{rcl} D_1(X) & = & -D(X) - \omega(Z_\Omega, X)e, \ X \in \mathfrak{g} \\ D_1(e) & = & 0. \end{array}$$

Cette dérivation permet de construire une extension par dérivation de E de dimension $\dim \mathfrak{g} + 2$, qui est un produit semi-direct

$$\mathfrak{g}' = (\mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}e) \ltimes_{D_1} \mathbb{K}d$$

de E par un espace de dimension 1, noté $\mathbb{K}d$. Son crochet est donné par

$$\begin{array}{rcl} [X,Y]_{\mathfrak{g}'} & = & [X,Y]_E \quad X,Y\in E \\ [d,X]_{\mathfrak{g}'} & = & -D_1(X)-\omega(Z_\Omega,X)e \end{array}$$

pour tout $X,Y\in E$. Alors l'application bilinéaire

$$\omega_1 : \mathfrak{g}'\times\mathfrak{g}'\rightarrow\mathfrak{g}'$$

donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \mid_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}}=\omega \\ \omega_1(e,d)=1 \end{array}\right.$$

les autres produits non définis étant nuls, est une forme symplectique sur $\mathfrak{g}'$ L'algèbre symplectique $(\mathfrak{g}',\omega_1)$ est appelée la double extension symplectique de $(\mathfrak{g},\omega)$ au moyen de D et Z_Ω. Cette construction ne fonctionne que sous l'hypothèse $\Omega\in B^2(\mathfrak{g},\mathbb{K})$. Par contre, on montre que toute algèbre de Lie nilpotente symplectique de dimension $2n+2$ est une double extension symplectique d'une algèbre symplectique nilpotente de dimension $2n$.

10 Structures complexes

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension paire $2n$ dont la multiplication est notée μ. Une structure complexe sur $\mathfrak{g}$ est donnée par un endomorphisme $J:\mathfrak{g}\rightarrow\mathfrak{g}$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} J^2=-Id \\ \mu(J(X),J(Y)=\mu(X,Y)+J(\mu(J(X),Y)+\mu(X,J(Y))) \end{array}\right.$$

pour tout $X,Y\in\mathfrak{g}$. Etablir l'existence d'une telle structure est un problème assez difficile. Dans le cas nilpotent, S.Salamon donne dans [27] la classification des algèbres de Lie nilpotentes réelles de dimension inférieure ou égale à 6 admettant une telle structure. Cette classification montre qu'il existe des algèbres nilpotentes n'admettant aucune structure complexe. Dans [22] on montre le résultat suivant :

Proposition 12 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie filiforme réelle de dimension $2n$. Alors il n'existe aucune structure complexe sur $\mathfrak{g}$.*

Rappelons que la suite caractéristique $c(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie nilpotente est l'invariant à isomorphisme près donné par

$$c(\mathfrak{g})=\max\{c(X),X\in\mathfrak{g}-\mathcal{D}^1(\mathfrak{g})\}$$

où $c(X)$ est la suite ordonnée décroissante des dimensions des blocs de Jordan de l'opérateur nilpotent adX. En particulier la classe des algèbres filiformes de dimension $2n$ est la classe des algèbres de caractéristique $(2n-1,1)$. Une algèbre est dite quasifiliforme si sa caractéristique est $(2n-2,1,1)$. En dimension 6, il n'existe qu'une seule classe d'algèbre quasi-filiforme admettant une structure complexe. On peut lire ce travail dans [10] qui repose sur la notion de structures complexes généralisées que l'on présente au paragraphe suivant.

11 Structures complexes généralisées

Les structures complexes généralisées sont une nouvelle espèce de structures géométriques, introduites par Nigel Hitchin, et qui contiennent les structures symplectiques et les structures complexes comme cas extrêmes. Elles sont en généralement définies sur des variétés différentables. Nous particularisons cette étude aux algèbres de Lie, ceci correspondant aux structures complexes généralisées invariantes à gauche sur des Groupes de Lie. Une présentation détaillée est faite dans [11].

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension $2n$. Notons par $[X, Y]$ le crochet de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}^*$ est le dual vectoriel de $\mathfrak{g}$, on définit sur la somme directe externe $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ une structure d'algèbre de Lie en posant

$$\mu(X + \alpha, Y + \beta) = [X, Y] + i(X)d\gamma + i(Y)d\alpha$$

où $X, Y \in\ g$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$ et $i(X)$ désignant le produit intérieur, c'est-à-dire

$$i(X)d\alpha(Z) = d\alpha(X, Z) = -\alpha[X, Z].$$

Munissons cette algèbre de Lie $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ du produit scalaire invariant (on dit que c'est une algèbre de Lie quadratique) donné par

$$< X + \alpha, Y + \beta >= \frac{1}{2}(\beta(X) + \alpha(Y)).$$

Ce produit scalaire est de signature $(2n, 2n)$ (rappelons que $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ est de dimension $4n$).

Définition 26 *On dit qu'un endomorphisme linéaire*

$$J : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$$

est une structure complexe généralisée si

1. J est une isométrie de $<, >$, c'est-à-dire

$$< J(X + \alpha), J(Y + \beta) >=< X + \alpha, Y + \beta >$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$,

2. Si L est l'espace propre associé à la valeur propre i de J sur l'espace complexe $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*) \otimes \mathbb{C}$, alors L est un sous-espace isotrope maximal de $<, >$ (donc de dimension $2n$), involutif pour μ, c'est-à-dire $\mu(L, L) \subset L$.

On peut caractériser les sous-espaces isotropes et isotropes maximaux en utilisant les algèbres de Clifford. Rappelons brièvement la définition. Une algèbre de Clifford est une algèbre unitaire associative qui est engendrée par un espace vectoriel V muni d'une forme quadratique Q soumise à la condition

$$v^2 = Q(v) \text{ pour tout v} \in \text{V}.$$

Soit φ un spineur (on peut prendre par exemple un élément de $\Lambda\mathfrak{g}^*$.) L'action de Clifford de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ sur le spineur ϕ est donnée par

$$(X + \alpha) \bullet \phi = i(X)\phi + \alpha \wedge \phi.$$

Cette action correspond à une représentation des algèbres de Clifford car

$$(X+\alpha)^2 \bullet \phi =< X+\alpha, X+\alpha > \phi.$$

A tout spineur ϕ, faisons correspondre le sous-espace vectoriel L_ϕ de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ donné par

$$L_\phi = \{(X+\alpha) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*, (X+\alpha) \bullet \phi = 0\}.$$

On dira que ϕ est un spineur pur lorsque $dimL_\phi = 2n$. Dans ce cas L_ϕ est un sous-espace isotrope maximal pour $<,>$. Inversement, si L est un sous-espace isotrope maximal, alors l'ensemble des spineurs

$$U_L = \{\varphi \in \Lambda\mathfrak{g}^*, \quad L = L_\varphi\}$$

est une droite de spineurs (purs) engendrée par un spineur du type

$$e^{B+i\omega}\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_k$$

où B et ω sont des formes réelles et θ_i des formes complexes de degré 1. Dans cette expression e^A désigne $Id + B + B \wedge B/2 + \ldots$

Définition 27 *On dira que la structure complexe généralisée J est de type k si k est la codimension de la projection de L sur $\mathfrak{g}$.*

Notons que si J est de type k, alors le spineur pur engendrant L s'écrit $e^{B+i\omega}\ \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_k$ (le même k).

Exemples.

1. Soit j une structure complexe sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ réelle de dimension $2n$. Alors l'endomorphisme de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ donné par

$$J_j(X+\alpha) = -j(X) + j^*(\alpha)$$

où j^* désigne la transposée de j est une structure complexe généralisée de type (maximal) n. Dans ce cas, si $T_{0,1}$ est l'espace propre de j associé à la valeur propre i, on a

$$L = (T_{0,1}) \oplus (T_{0,1})^*$$

et le spineur pur définissant L est donné par

$$\rho = e^B\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n$$

Réciproquement, toute structure symplectique généralisée de type n correspond à une structure complexe sur $\mathfrak{g}$.

2. Supposons que $\mathfrak{g}$ admette une forme symplectique ω. Nous pouvons considérer ω comme un isomorphisme

$$\omega : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$$

donné par $\omega(X) = i(X)\omega$. Soit l'endomorphisme de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ donné par

$$J_\omega(X+\alpha) = i(X)\omega - \omega^{-1}(\alpha).$$

Il définit une structure complexe généralisée de type 0. Dans ce cas

$$L = \left\{X+\alpha, \omega^{-1}(\alpha) = iX, \omega(X) = i\alpha\right\} = \{X - i\omega(X), X \in \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}\}.$$

Réciproquement, toute structure symplectique généralisée de type 0 correspond à une structure symplectique sur $\mathfrak{g}$.

12 Structures affines

Une structure affine sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dont la multiplication est notée μ est donnée par une application bilinéaire

$$\nabla : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

vérifiant

$$\begin{cases} \nabla(X,Y) - \nabla(Y,X) = \mu(X,Y) \\ \nabla(X,\nabla(Y,Z)) - \nabla(Y,\nabla(X,Z)) = \nabla(\nabla(X,Y),Z) - \nabla(\nabla(Y,X),Z) \end{cases}$$

pour tout $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$. Cette opération correspond en fait à la donnée d'une connexion affine sans courbure ni torsion invariante à gauche sur un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Les identités ci-dessus signifie que l'algèbre $(\mathfrak{g}, \nabla)$ est une algèbre symétrique gauche encore appelée algèbre de Pré-Lie. Toute algèbre associative est donc de Pré-Lie. On en déduit que toute algèbre de Lie associée à une algèbre associative admet une structure affine. Si ∇ est commutative, alors c'est une multiplication associative commutative et l'algèbre de Lie associée est abélienne. Il y a donc une correspondance bijective entre les algèbres associatives commutatives de dimension n et les structures affines sur l'algèbre abélienne de dimension n. Par exemple, on pourra consulter cette classification pour $n = 3$ dans [21]. Pour la dimension 4 on pourra consulter [8].

Le problème d'existence d'une structure affine sur une algèbre nilpotente a longtemps été dicté par la conjecture de Milnor stipulant que toute algèbre de Lie nilpotente était munie d'une structure affine. Ceci impliquait en particulier que toute nilvariété était affine (munie d'une connexion affine sans courbure ni torsion). En fait Y. Besnoit a mis en évidence une nilvariété de dimension 11 sans structure affine. L'algèbre de Lie correspondante est filiforme [7] . Dans ce qui suit, on va donner des exemples de structure affine construite en fonction de certaines propriétés de $\mathfrak{g}$.

- Supposons que $\mathfrak{g}$ soit de dimension $2n$ et munie d'une forme symplectique ω. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, soit f_X l'adjoint de adX pour la forme ω :

  $$\omega(\mu(Y,X),Z) = -\omega(Y, f_X(Z))$$

  pour tout $Y,Z \in \mathfrak{g}$. On vérifie assez facilement que l'opération

  $$\nabla(X,Y) = f_X(Y)$$

  munie $\mathfrak{g}$ d'une structure affine.

- Supposons que $\mathfrak{g}$ soit munie d'une dérivation f inversible. Ceci implique nécessairement que $\mathfrak{g}$ soit nilpotente. Rappelons qu'une dérivation est un endomorphisme linéaire $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ vérifiant

  $$f(\mu(X,Y)) = \mu(f(X),Y) + \mu(X,f(Y))$$

  pour tout $X,Y \in \mathfrak{g}$. L'application bilinéaire définie par

  $$\nabla(X,Y) = f^{-1}(\mu(f(X),Y))$$

  est une structure affine sur $\mathfrak{g}$. La démonstration est laissée ici aussi en exercice.

- On peut également construire une telle structure en considérant une dérivation f inversible ou non mais en supposant que la restriction de la dérivation f à l'algèbre dérivée soit inversible. Dans ce cas l'opération ∇ est définie comme ci-dessus.

- Supposons que $\mathfrak{g}$ soit munie d'un opérateur de Baxter-Yang R, c'est-à-dire d'un endomorphisme vérifiant
$$\mu(R(X), R(Y) = R(\mu(R(X), Y) + \mu(X, R(Y))).$$
Alors l'opération
$$\nabla(X, Y) = \mu(R(X), Y)$$
est une multiplication d'algèbre de Pré-Lie. On en déduit que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ de multiplication μ' donnée par
$$\mu'(X, Y) = \nabla(X, Y) - \nabla(Y, X)$$
est munie d'une structure affine. En général $\mu' \neq \mu$ sauf si l'application $Id - R$ est à valeurs dans le centre de $\mathfrak{g}$.

- Dans le même ordre d'idée, si $\mathfrak{g}$ est munie d'un opérateur de Baxter-Rota R, c'est-à-dire d'un endomorphisme vérifiant
$$\mu(R(X), R(Y) + \mu(X, Y) = R(\mu(R(X), Y) + \mu(X, R(Y)))$$
alors l'application
$$\nabla(X, Y) = \mu(R(X), Y)$$
donne un résultat analogue au prédent.

- Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle de dimension $2n$ munie d'une structure complexe intégrable, c'est-à-dire d'un endomorphisme $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ vérifiant $J^2 = -Id$ et la condition de Nijenhuis
$$\mu(J(X), J(Y) = \mu(X, Y) + J(\mu(J(X), Y) + \mu(X, J(Y)))$$
alors le morphisme $R = -iJ$ est un opérateur de Baxter-Rota. On en déduit que
$$\nabla(X, Y) = \mu(J(X), Y)$$
définit une structure affine sur l'algèbre de Lie de multiplication $\mu'(X, Y) = \nabla(X, Y) - \nabla(Y, X)$.

13 Espaces homogènes réductifs

Soient G un groupe de Lie connexe et H un sous-groupe de Lie. On dit que l'espace homogène $M = G/H$ est réductif si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G peut se décomposer en une somme directe vectorielle
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$
où $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie de H et $\mathfrak{m}$ un sous espace vectoriel vérifiant
$$ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$$

ce qui est équivalent si H est connexe à
$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}.$$
Ici, on note par $[X, Y]$ la multiplication de $\mathfrak{g}$, pour rester conforme aux écritures classiques en géométrie différentielle. De telles variétés admettent toujours des connexions invariantes par G et une unique connexion affine ∇ sans torsion G-invariante qui est complète. En ce qui concerne les métriques (riemanniennes ou pseudo-riemanniennes), il y a une correspondance bijective entre l'ensembles des métriques sur l'espace homogène réductif $M = G/H$ invariante par G et les formes bilinéaires symétriques non dégénérées B sur $\mathfrak{m}$ qui sont $ad(H)-$invariantes, c'est-à-dire, si H est connexe, qui vérifient
$$B([Z, X], Y) + B(X, [Z, Y]) = 0$$
pour $X, Y \in \mathfrak{m}$ et $Z \in \mathfrak{h}$. La connexion riemannienne associée coïncide avec la connexion affine canonique sans torsion si et seulement si
$$B([Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y) + B(X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) = 0$$
pour $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ où $[,]_{\mathfrak{m}}$ désigne la projection sur $\mathfrak{m}$ du crochet. Dans ce cas, M est appelé espace homogène riemannien naturellement réductif.

13.1 Espaces symétriques

La classe la plus connue et la plus étudiée d'espaces homogènes réductifs et dans le cas riemannien, naturellement réductifs est celle des espaces symétriques. Un espace symétrique est la donnée d'un espace homogène $M = G/H$ et d'un automorphisme involutif σ de G tel que H soit compris entre le sous groupe G_σ des points fixes de G par σ et sa composante connexe passant par l'identité de G. Ceci revient à se donner, en tout point $x \in M$, un difféomorphisme involutif, appelée symétrie et notée s_x, tel que x soit un point fixe isolé. Dans ce cas, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est symétrique, c'est-à-dire s'écrit, d'après la décomposition réductive
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$
avec
$$\begin{cases} [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \\ [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m} \\ [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h} \end{cases}$$
Notons que dans ce cas, on a nécessairement $ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ et donc un espace symétrique est bien réductif. De plus, la connexion canonique associée à tout espace homogène réductif est, dans le cas symétrique, la seule connexion affine invariante par les symétries. Considérons une algèbre de Lie symétrique. L'application ρ définie par $\rho(X) = X$ pour tout $X \in \mathfrak{h}$ et $\rho(Y) = -Y$ pour tout $Y \in \mathfrak{m}$ est un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$. Ainsi toute espace symétrique définit une algèbre de Lie symétrique naturellement munie d'un automorphisme involutif. La réciproque n'est pas exacte. Toutefois, si on suppose que le groupe de Lie G est connexe et simplement connexe, alors l'automorphisme ρ de $\mathfrak{g}$ induit un automorphisme involutif σ de G et pour tout sous-groupe de Lie H compris entre le sous-groupe des points fixes de σ et sa composante de l'identé, son algèbre de Lie étant $\mathfrak{h}$, l'espace homogène G/H est symétrique et l'automorphisme associé est σ.

Un espace symétrique est dit riemannien s'il est muni d'une métrique G-invariante pour laquelle les symétries s_x sont des isométries pour tout $x \in M = G/H$. En fait, dans ce cas, G correspond au plus grand groupe connexe des isométries de M et H le sous-groupe d'isotropie en un point fixé

de M. Si la métrique est riemannienne, alors H est compact, si elle est pseudo-riemannienne ceci n'est pas toujours vrai. Dans tous les cas, on suppose que le sous-groupe $ad(H)$ des transformations linéaires de $\mathfrak{g}$ est compact. On en déduit que $\mathfrak{g}$ admet un produit scalaire $ad(H)$ invariant tel que $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{m}$ soient orthogonaux. En restriction à $\mathfrak{m}$, on retrouve la métrique $G-$invariante munissant G/H d'une structure d'espace symétrique riemannien. La connexion riemannien coïncide nécessairement avec la connexion naturelle sans torsion de l'espace homogène réductif G/H. L'espace riemannien G/H est donc naturellement réductif. Les algèbres de Lie symétriques correspondantes aux espaces symétriques riemanniens sont les algèbres de Lie orthogonales symétriques. Ce sont des algèbres de Lie symétriques $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ telles que l'algèbre de Lie $ad(\mathfrak{h})$ soit compacte. Si H n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, ceci est équivalent à dire que le groupe $ad(H)$ est compact. Nous avons vu que $\mathfrak{g}$ admettait un produit scalaire B qui est donc $ad(\mathfrak{h})-$invariant et pour lequel $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{m}$ sont orthogonaux. L'invariance de B se traduit par

$$B([X,Y],Z) + B(Y,[X,Z]) = 0$$

pour tout $X \in \mathfrak{h}$ et $Y, Z \in \mathfrak{m}$. On en déduit la structure d'une algèbre symétrique orthogonale. Supposons l'espace symétrique riemannien (et non pseudo-riemannien). Si le centre de $\mathfrak{g}$ ne rencontre pas $\mathfrak{m}$, alors $\mathfrak{g}$ est la somme directe de deux algèbres symétriques orthogonales $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{m}_2$ avec $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] = 0$ et $\mathfrak{g}_2$ semi-simple. L'étude des algèbres de Lie symétriques orthogonales se ramène donc à la classe des algèbres semi-simples. Si l'algèbre symétrique orthogonale est simple, la forme de Killing-Cartan K de $\mathfrak{g}$ est définie (positive ou négative) sur $\mathfrak{m}$. Elle est dite de type compact si K est définie négative sur $\mathfrak{m}$, et de type non-compact si elle est définie positive. Dans le premier cas, l'espace G/H est symétrique riemannien compact. Leur classification se décrit entièrement par celle des algèbres simples symétriques orthogonales compactes. Elle est due à Elie Cartan. Dans la liste suivante on donne le couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

AI : $(su(n), so(n))$
AII : $(su(2n), sp(n))$
AIII : $(su(p+q), su(p) \oplus su(q)$
BDI : $(so(p+q), so(p) \oplus so(q)$
DIII : $(so(2n), u(n))$
CI : $(sp(n), u(n))$
CII : $(sp(p+q), sp(p) \oplus sp(q)$
EI : $(E(6), sp(4))$
EII $(E(6), su(6) \oplus su(2))$
EIII : $(E(6), so(10) \oplus so(2))$
EIV : $(E(6), F(4))$
EV : $(E(7), su(8))$
EVI : $(E(7), so(12) \oplus su(2))$
EVII : $(E(7), E(6) \oplus so(2))$
EVIII: $(E(8), so(16))$
EIX : $(E(8), E(7) \oplus su(2))$
FI : $(F(4), sp(3) \oplus su(2))$
FII: $(F(4), so(9))$
G : $(G(2), su(2) \oplus su(2))$

13.2 Espaces homogènes réductifs non-symétriques

Soit Γ un groupe abélien fini. Un espace homogène $M = G/H$ est dit $\Gamma-$symétrique s'il existe un sous-groupe Γ_G de $Aut(G)$ isomorphe à Γ tel que H soit compris entre l'ensemble des points fixes de tous les éléments σ_γ de Γ_G et sa composante connexe passant par l'élément neutre. Dans ce cas, il existe pour tout $x \in M$ un sous-groupe du groupe des difféomorphismes de M isomorphe à Γ. Les éléments sont appelés les symétries et notées $s_{\gamma,x}$ et x et un point fixe isolé de ces symétries. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G admet une décomposition $\Gamma-$symétrique, c'est-à-dire s'écrit

$$\mathfrak{g} = \oplus_{\gamma\in\Gamma}\ \mathfrak{g}_\gamma$$

avec

$$[\mathfrak{g}_{\gamma_1}, \mathfrak{g}_{\gamma_2}] \subset \mathfrak{g}_{\gamma_1\gamma_2}.$$

Une telle algèbre est appelée Γ-symétrique. Cette graduation est définie par un sous-groupe d'automor--phisme de $\mathfrak{g}$ isomorphe à Γ et si G est connexe et simplement connexe, cette graduation définit une structure $\Gamma-$symétrique sur G/H. Si on pose $\mathfrak{m} = \oplus_{\gamma\neq 1_\Gamma}\ \mathfrak{g}_\gamma$, on voit que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{1_\Gamma} \oplus \mathfrak{m}$ et cette décomposition donne une structure d'espace homogène réductif sur G/H. Contrairement aux espaces symétriques, la connexion canonique de Nomizu et la connexion canonique sans torsion d'un espace homogène réductif ne coïncident pas. Dans [?], en utilisant les graduations des algèbres simples par des groupes finis, on donne la classification des espaces homogènes réductifs $\mathbb{Z}_2^2$-symétriques lorsque $\mathfrak{g}$ est simple et non exceptionnelle. On en déduit en particulier la classification des algèbres simples compactes $\mathbb{Z}_2^2$-symétriques non exceptionnelles :

$(su(2n), su(n))$
$(su(k_1 + k_2), su(k_1) \oplus su(k_2) \oplus \mathbb{C})$
$(su(k_1 + k_2 + k_3), su(k_1) \oplus su(k_2) \oplus su(k_3) \oplus \mathbb{C}^2)$
$(su(k_1 + k_2 + k_3 + k_4), su(k_1) \oplus su(k_2) \oplus su(k_3) \oplus su(k_4) \oplus \mathbb{C}^3)$
$(su(n), so(n))$
$(su(2m), sp(m))$
$(su(k_1 + k_2), so(k_1) \oplus so(k_2))$
$(su2(k_1 + k_2), sp(2k_1) \oplus sp(2k_2))$
$(so(k_1 + k_2 + k_3 + k_4), so(k_1) \oplus so(k_2) \oplus so(k_3) \oplus so(k_4))$
$(so(4m), sp(2m))$
$(so(2m), so(m))$
$(sp(k_1 + k_2 + k_3 + k_4), sp(k_1) \oplus sp(k_2) \oplus sp(k_3) \oplus sp(k_4))$
$(sp(4m), sp(2m))$
$(sp(2m), so(m))$

13.3 Espaces riemanniens et pseudo-riemanniens Γ-symétriques

Soit $(M = G/H, \Gamma)$ un espace homogène Γ-symétrique.

Définition 28 *Une métrique riemannienne g sur M est dite adaptée à la structure Γ-symétrique si chacune des symétries $s_{\gamma,x}$ est une isométrie.*

Si $\bigtriangledown_g$ est la connexion de Levi-Civita de g, cette connexion ne coïncide pas en général avec la connexion canonique $\bigtriangledown$ de l'espace homogène (Γ-symétrique). Ces deux connexions coïncident si et seulement si g est naturellement réductive.

Par exemple dans le cas de la sphère S^3 considérée comme espace $(\mathbb{Z}_2)^2$-symétrique, les métriques adaptées à cette structure sont les métriques sur $SO(4)/Sp(2)$ invariantes par $SO(4)$ chacune étant définie par une forme bilinéaire symétrique B sur $so(4)$ qui est $ad(sp(2))$-invariante. Si $so(4) = sp(2) \oplus \mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_b \oplus \mathfrak{g}_c$ est la décomposition $(\mathbb{Z}_2)^2$-graduée correspondante, le fait de dire que sur S^3 les symétries $s_{\gamma,x}$ sont des isométries est équivalent à dire que les espaces $\mathfrak{g}_e, \mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b, \mathfrak{g}_c$ sont deux à deux orthogonaux pour B. Décrivons en détail cette graduation:

$$sp(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & 0 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & 0 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \ \mathfrak{g}_a = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_b = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & y & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \mathfrak{g}_c = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si $\{A_1, A_2, A_3, X, Y, Z\}$ est une base adaptée à cette graduation et si $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ en est la base duale alors

$$B\,|_{\mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_b \oplus \mathfrak{g}_c} = \lambda_1^2 \omega_1^2 + \lambda_2^2 \omega_2^2 + \lambda_3^2 \omega_3^2.$$

La métrique correspondante sera naturellement réductive si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ et dans ce cas-là elle correspond à la restriction de la forme de Killing Cartan.

13.4 Exemple : l'espace pseudo-riemannien $SO(2m)/Sp(m)$

13.4.1 La graduation $(\mathbb{Z}_2)^2$-symétrique

Considérons les matrices

$$S_m = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \ X_a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $M \in so(2m)$. Les applications

$$\tau_a(M) = J_a^{-1} M J_a$$
$$\tau_b(M) = J_b^{-1} M J_b$$
$$\tau_a(M) = J_c^{-1} M J_c$$

où $J_a = S_m \otimes X_a$, $J_b = S_m \otimes X_b$, $J_c = S_m \otimes X_c$ sont des automorphismes involutifs de $so(2m)$ qui commutent deux à deux. Ainsi $\{Id, \tau_a, \tau_b, \tau_c\}$ est un sous groupe de $Aut(so(2m))$ isomorphe à $(\mathbb{Z}_2)^2$. Il définit donc une $(\mathbb{Z}_2)^2$-graduation

$$so(2m) = \mathfrak{g}_e \oplus \mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_b \oplus \mathfrak{g}_c$$

où

$$\mathfrak{g}_e = \{M \in so(2m) \,/\, \tau_a(M) = \tau_b(M) = \tau_c(M) = M\}$$
$$\mathfrak{g}_a = \{M \in so(2m) \,/\, \tau_a(M) = \tau_c(M) = -M, \tau_b(M) = M\}$$
$$\mathfrak{g}_b = \{M \in so(2m) \,/\, \tau_b(M) = \tau_c(M) = -M, \tau_a(M) = M\}$$
$$\mathfrak{g}_c = \{M \in so(2m) \,/\, \tau_a(M) = \tau_b(M) = -M, \tau_c(M) = M\}$$

Ainsi

$$\mathfrak{g}_e = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & B_1 & A_2 & B_2 \\ -B_1 & A_1 & B_2 & -A_2 \\ \hline -{}^tA_2 & -{}^tB_2 & A_1 & B_1 \\ -{}^tB_2 & {}^tA_2 & -B_1 & A_1 \end{array} \right) \text{ avec } \begin{array}{ll} {}^tA_1 = -A_1, & {}^tB_1 = B_1 \\ {}^tA_2 = A_2, & {}^tB_2 = B_2 \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_a = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} X_1 & Y_1 & Z_1 & T_1 \\ Y_1 & -X_1 & -T_1 & Z_1 \\ \hline -{}^tZ_1 & {}^tT_1 & -X_1 & -Y_1 \\ -{}^tT_1 & -{}^tZ_1 & -Y_1 & X_1 \end{array} \right) \text{ avec } \begin{array}{ll} {}^tX_1 = -X_1, & {}^tY_1 = -Y_1 \\ {}^tZ_1 = -Z_1, & {}^tT_1 = T_1 \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_b = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} X_2 & Y_2 & Z_2 & T_2 \\ -Y_2 & X_2 & T_2 & Z_2 \\ \hline -{}^tZ_2 & -{}^tT_2 & -X_2 & -Y_2 \\ -{}^tT_2 & -{}^tZ_2 & Y_2 & -X_2 \end{array} \right) \text{ avec } \begin{array}{ll} {}^tX_2 = -X_2, & {}^tY_2 = Y_2 \\ {}^tZ_2 = -Z_2, & {}^tT_2 = -T_2 \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_c = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} X_3 & Y_3 & Z_3 & T_3 \\ Y_3 & -X_3 & -T_3 & Z_3 \\ \hline -{}^tZ_3 & {}^tT_3 & X_3 & Y_3 \\ -{}^tT_3 & -{}^tZ_3 & Y_3 & -X_3 \end{array} \right) \text{ avec } \begin{array}{ll} {}^tX_3 = -X_3, & {}^tY_3 = -Y_3 \\ {}^tZ_3 = Z_3, & {}^tT_3 = -T_3 \end{array} \right\}$$

Notons que $dim\mathfrak{g}_e = m(2m+1)$, $dim\mathfrak{g}_a = dim\mathfrak{g}_b = dim\mathfrak{g}_c = m(2m-1)$.

Proposition 13 *Dans cette graduation $\mathfrak{g}_e$ est isomorphe à $sp(m)$ et toute $(\mathbb{Z}_2)^2$-graduation de $so(2m)$ telle que $\mathfrak{g}_e$ soit isomorphe à $sp(m)$ est équivalente à la graduation ci-dessus.*

En effet $\mathfrak{g}_e$ est simple de rang m et de dimension $m(2m+1)$. La deuxième partie résulte de la classification donnée dans [4] et [5].

Corollaire 4 *Il n'existe, à équivalence près, qu'une seule structure d'espace homogène $(\mathbb{Z}_2)^2$-symétrique sur l'espace homogène compact $SO(2m)/Sp(m)$.*

Cette structure est associée à l'existence en tout point x de $SO(2m)/Sp(m)$ d'un sous-groupe de $\mathcal{D}iff(M)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}_2)^2$. Notons Γ_x ce sous-groupe. Il est entièrement défini dès que l'on connait $\Gamma_{\bar{1}}$ où $\bar{1}$ est la classe dans $SO(2m)/Sp(m)$ de l'élément neutre 1 de $SO(2m)$. Notons

$$\Gamma_{\bar{1}} = \left\{ s_{e,\bar{1}}, s_{a,\bar{1}}, s_{b,\bar{1}}, s_{c,\bar{1}} \right\},$$

les symétries $s_{\gamma,\bar{1}}(x) = \pi(\rho_\gamma(A))$ où $\pi : SO(2m) \to SO(2m)/Sp(m)$ est la submersion canonique, $x = \pi(A)$ et ρ_γ est un automorphisme de $SO(2m)$ dont l'application tangente en 1 coincide avec τ_γ. Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_a(A) = J_a^{-1} A J_a \\ \rho_b(A) = J_b^{-1} A J_b \\ \rho_c(A) = J_c^{-1} A J_c \end{array} \right. .$$

Si $B \in \pi(A)$ alors il existe $P \in Sp(m)$ tel que $B = AP$. On a $J_a^{-1} B J_a = J_a^{-1} A J_a J_a^{-1} P J_a = J_a^{-1} A J_a$ car P est invariante pour tous les automorphismes ρ_a, ρ_b, ρ_c.
Une métrique non dégénérée g invariante par $SO(2m)$ sur $SO(2m)/Sp(m)$ est adaptée à la $(\mathbb{Z}_2)^2$-structure si les symétries $s_{x,\gamma}$ sont des isométries c'est-à-dire si les automorphismes ρ_γ induisent des isométries linéaires.

Ceci implique que g soit définie par une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B sur $\mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_b \oplus \mathfrak{g}_c$ telle que les espaces $\mathfrak{g}_a$, $\mathfrak{g}_b$, $\mathfrak{g}_c$ soient deux à deux orthogonaux. Déterminons toutes les formes bilinéaires B vérifiant les hypothèses ci-dessus. Une telle forme s'écrit donc

$$B = B_a + B_b + B_c$$

où B_a(resp. B_b, resp. B_c) est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante par $\mathfrak{g}_e$ dont le noyau contient $\mathfrak{g}_b \oplus \mathfrak{g}_c$ (resp. $\mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_c$, resp. $\mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_b$).

13.4.2 Exemples

1) Dans le cas de la sphère $SO(4)/Sp(2)$ la métrique adaptée à la structure $(\mathbb{Z}_2)^2$-symétrique est définie par la forme bilinéaire B sur $\mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_b \oplus \mathfrak{g}_c$ qui est $ad(sp(2))$-invariante. Nous avons vu qu'une telle forme s'écrivait

$$B = \lambda_1^2\omega_1^2 + \lambda_2^2\omega_2^2 + \lambda_3^2\omega_3^2.$$

Elle est définie positive si et seulement si les coefficients λ_i sont positifs ou nuls.

2) Considérons l'espace $(\mathbb{Z}_2)^2$-symétrique compact $SO(8)/Sp(4)$. Afin de fixer les notations écrivons la $(\mathbb{Z}_2)^2$-graduation de $so(8)$ ainsi:

$$\mathfrak{g}_a = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} X_1 & Y_1 & Z_1 & T_1 \\ Y_1 & -X_1 & -T_1 & Z_1 \\ \hline -{}^tZ_1 & {}^tT_1 & -X_1 & -Y_1 \\ -{}^tT_1 & -{}^tZ_1 & -Y_1 & X_1 \end{array} \right) \text{ avec } \begin{array}{ll} {}^tX_1 = -X_1, & {}^tY_1 = -Y_1 \\ {}^tZ_1 = -Z_1, & {}^tT_1 = T_1 \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_b = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} X_2 & Y_2 & Z_2 & T_2 \\ -Y_2 & X_2 & T_2 & Z_2 \\ \hline -{}^tZ_2 & -{}^tT_2 & -X_2 & -Y_2 \\ -{}^tT_2 & {}^tZ_2 & Y_2 & -X_2 \end{array} \right) \text{ avec } \begin{array}{ll} {}^tX_2 = -X_2, & {}^tY_2 = Y_2 \\ {}^tZ_2 = -Z_2, & {}^tT_2 = -T_2 \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_c = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} X_3 & Y_3 & Z_3 & T_3 \\ Y_3 & -X_3 & -T_3 & Z_3 \\ \hline -{}^tZ_3 & {}^tT_3 & X_3 & Y_3 \\ -{}^tT_3 & -{}^tZ_3 & Y_3 & -X_3 \end{array} \right) \text{ avec } \begin{array}{ll} {}^tX_3 = -X_3, & {}^tY_3 = -Y_3 \\ {}^tZ_3 = Z_3, & {}^tT_3 = -T_3 \end{array} \right\}$$

et pour la matrice X_i (resp. Y_i, Z_i, T_i) on notera $X_i = \begin{pmatrix} 0 & x_i \\ -x_i & 0 \end{pmatrix}$ si elle est antisymétrique ou $X_i = \begin{pmatrix} x_i^1 & x_i^2 \\ x_i^2 & x_i^3 \end{pmatrix}$ si elle est symétrique, c'est à dire $X_i = \sum_j x_i^j X_i^j$.

Enfin on notera par les lettres $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ les formes linéaires duales des vecteurs définis respectivement par les matrices X_i, Y_i, Z_i, T_i. Ainsi si X_i est antisymétrique, la forme duale correspondante sera notée α_i, et si X_i est symétrique, les formes duales $\alpha_i^1, \alpha_i^2, \alpha_i^3$ correspondent aux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ceci étant la forme B s'écrit $B_a + B_b + B_c$ où la forme B_γ a pour noyau $\mathfrak{g}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}_{\gamma_2}$ avec $\mathfrak{g}_\gamma \neq \mathfrak{g}_{\gamma_1}$ et $\mathfrak{g}_\gamma \neq \mathfrak{g}_{\gamma_2}$. Déterminons B_a. Comme elle est invariante par $ad(sp(2))$

on obtient:

$$\begin{cases} B_a(X_1,Y_1)=B_a(X_1,Z_1)=B_a(X_1,T_1^i)=0 \\ B_a(Y_1,Z_1)=B_a(Y_1,T_1^i)=0 \\ B_a(Z_1,T_1^i)=B_a(T_1^i,T_1^2)=0 \text{ pour } i=1,3 \\ B_a(X_1,X_1)=B_a(Y_1,Y_1)=B_a(Z_1,Z_1)=B_a(T_1^2,T_1^2)=0 \\ B_a(T_1^1,T_1^1)=B_a(T_1^3,T_1^3) \\ B_a(X_1,X_1)=2B_a(T_1^1,T_1^1)-2B_a(T_1^1,T_1^3) \end{cases}$$

Ainsi la forme quadratique associée s'écrit

$$q_{\mathfrak{g}_a}=\lambda_1(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2+(\delta_1^2)^2)+\lambda_2((\delta_1^1)^2)+(\delta_1^3)^2)+(\lambda_2-\frac{\lambda_1}{2})((\delta_1^1)(\delta_1^3))$$

soit

$$q_{\mathfrak{g}_a}=\lambda_1(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2+(\delta_1^2)^2)+(\frac{3\lambda_2}{4}-\frac{\lambda_1}{8})(\delta_1^1+\delta_1^3)^2+(\frac{\lambda_2}{4}+\frac{\lambda_1}{8})(\delta_1^1-\delta_1^3)^2.$$

De même nous aurons

$$q_{\mathfrak{g}_b}=\lambda_3(\alpha_2^2+(\beta_2^2)^2+\gamma_2^2+\delta_2^2)+(\frac{3\lambda_4}{4}-\frac{\lambda_3}{8})(\beta_2^1+\beta_2^3)^2+(\frac{\lambda_4}{4}+\frac{\lambda_3}{8})(\beta_2^1-\beta_2^3)^2$$

et

$$q_{\mathfrak{g}_c}=\lambda_5(\alpha_3^2+\beta_3^2+(\gamma_3^2)^2+\delta_3^2)+(\frac{3\lambda_6}{4}-\frac{\lambda_5}{8})(\gamma_3^1+\gamma_3^3)^2+(\frac{\lambda_6}{4}+\frac{\lambda_5}{8})(\gamma_3^1-\gamma_3^3)^2.$$

Remarques. 1. La forme B définit une métrique riemannienne si et seulement si

$$\lambda_{2p}>\frac{\lambda_{2p-1}}{6}>0$$

pour $p=1,2,3$. Si cette contrainte est relachée, la forme B, supposée non dégénérée, peut définir une métrique pseudo-riemannienne sur l'espace $(\mathbb{Z}_2)^2$-symétrique. Nous verrons cela dans le dernier paragraphe.

2. Considérons le sous-espace $\mathfrak{g}_e\oplus\mathfrak{g}_a$. Comme $[\mathfrak{g}_a,\mathfrak{g}_a]\subset\mathfrak{g}_e$, c'est une sous-algèbre de $so(8)$ (ou plus généralement de $\mathfrak{g}$) admettant une stucture symétrique. La forme B_a induit donc une structure riemannienne ou pseudo-riemannienne sur l'espace symétrique associé à l'espace symétrique local $(\mathfrak{g}_e,\mathfrak{g}_a)$. Dans l'exemple précédent $\mathfrak{g}_e\oplus\mathfrak{g}_a$ est la sous-algèbre de $so(8)$ donnée par les matrices:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} X_1 & X_3 & X_4 & X_5 \\ -{}^tX_3 & X_2 & X_6 & -{}^tX_4 \\ \hline -{}^tX_4 & -{}^tX_6 & X_2 & {}^tX_3 \\ -{}^tX_5 & X_4 & -{}^tX_3 & X_2 \end{array}\right) \text{ avec } \begin{array}{ll} {}^tX_1=-X_1, & {}^tX_2=-X_2 \\ {}^tX_5=X_5, & {}^tX_6=X_6 \end{array}$$

Dans [8], on détermine les espaces réels en étudiant ces structures symétriques $\mathfrak{g}_e\oplus\mathfrak{g}_a$ données par deux automorphismes commutant de $\mathfrak{g}$. En effet si $\mathfrak{g}$ est simple réelle et si σ est un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$, il existe une sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{g}$ qui est invariante par σ et l'étude des espaces locaux symétriques $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_e)$ se ramène à l'étude des espaces locaux symétriques $(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_{11})$ où $\mathfrak{g}_1$ est compacte. Dans ce cas $\mathfrak{g}$ est définie à partir de $\mathfrak{g}_1$ par un automorphisme involutif τ commutant avec

l'automorphisme σ. Ici notre approche est en partie similaire mais le but est de regarder la structure des espaces non symétrique associés aux paires $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_e)$.

Dans le cas particulier de l'espace $(\mathbb{Z}_2)^2$-symétrique compact $SO(8)/Sp(4)$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_e \oplus \mathfrak{g}_a$ est isomorphe à $so(4) \oplus \mathbb{R}$ où $\mathbb{R}$ désigne l'algèbre abélienne de dimension 1. Notons également que chacun des espaces symétriques $\mathfrak{g}_e \oplus \mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_e \oplus \mathfrak{g}_b, \mathfrak{g}_e \oplus \mathfrak{g}_c$ est isomorphe à $so(4) \oplus \mathbb{R}$. Mais ceci n'est pas général, les algèbres symétriques peuvent ne pas être isomorphes ni même de même dimension. L'espace symétrique compact connexe associé est l'espace homogène $Su(4)/Sp(2) \times \mathbb{T}$ où $\mathbb{T}$ est le tore à une dimension. C'est un espace riemannien symétrique compact non irréductible. La métrique $q_{\mathfrak{g}_a}$ définie précédemment correspond à une métrique riemannienne ou pseudo-riemannienne sur cet espace. La restriction au premier facteur correspond à la métrique associée à la forme de Killing Cartan sur $su(4)$. Elle correspond à $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}$.

13.4.3 Cas général: métriques adaptées sur $SO(2m)/Sp(m)$

Notations. Nous avons écrit une matrice générale de $\mathfrak{g}_a$ sous la forme (13.4.1). Si on note (X_1, Y_1, Z_1, T_1) un élément de $\mathfrak{g}_a$, on considère la base de $\mathfrak{g}_a$, $\{X_{1,ij}, Y_{1,ij}, Z_{1,ij}, T_{1,ij}\}$ correspondant aux matrices élémentaires . La base duale sera notée $(\alpha_{a,ij}, \beta_{a,ij}, \gamma_{a,ij}, \delta_{a,ij})$. Rappelons que X_1, Y_1, Z_1 sont anti-symétriques alors que T_1 est symétrique. Les crochets correspondent aux représentations de $so(\frac{m}{2})$ sur lui-même ou de $so(\frac{m}{2})$ sur l'espace des matrices symétriques. On aura donc

$$q_{\mathfrak{g}_a} = \lambda_1^a(\sum(\alpha_{a,ij}^2 + \beta_{a,ij}^2 + \gamma_{a,ij}^2) + \sum_{i \neq j} \delta_{a,ij}^2) + \lambda_2^a(\delta_{a,ii}^2) + (\lambda_2^a - \frac{\lambda_1^a}{2})(\sum_{i<j}(\delta_{a,ii}\delta_{a,jj}).$$

Les formes $q_{\mathfrak{g}_b}$ et $q_{\mathfrak{g}_c}$ admettent une décomposition analogue, en tenant compte du fait que dans $\mathfrak{g}_b$ ce sont les matrices Y_2 qui sont symétriques et pour $\mathfrak{g}_a$ les matrices Z_1 (13.4.1). On note $(\alpha_{b,ij}, \beta_{b,ij}, \gamma_{b,ij}, \delta_{b,ij})$ la base duale de $\{X_{2,ij}, Y_{2,ij}, Z_{2,ij}, T_{2,ij}\}$ et par $(\alpha_{c,ij}, \beta_{c,ij}, \gamma_{c,ij}, \delta_{c,ij})$ la base duale de $\{X_{3,ij}, Y_{3,ij}, Z_{3,ij}, T_{3,ij}\}$.

Proposition 14 *Toute métrique non dégénérée adaptée à la structure $(\mathbb{Z}_2)^2$-symétrique de l'espace homogène $SO(2m)/Sp(m)$ est définie à partir de la forme bilinéaire $ad(\mathfrak{g}_e)$-invariante sur $\mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_b \oplus \mathfrak{g}_c$ $B = q_{\mathfrak{g}_a} + q_{\mathfrak{g}_b} + q_{\mathfrak{g}_b}$ avec*

$$\begin{cases} q_{\mathfrak{g}_a} = \lambda_1^a \left(\sum(\alpha_{a,ij}^2 + \beta_{a,ij}^2 + \gamma_{a,ij}^2\right) + \sum_{i \neq j} \delta_{a,ij}^2) + \lambda_2^a(\delta_{a,ii}^2) + (\lambda_2^a - \frac{\lambda_1^a}{2})(\sum_{i<j}(\delta_{a,ii}\delta_{a,jj}) \\ q_{\mathfrak{g}_b} = \lambda_1^b(\sum(\alpha_{b,ij}^2 + \gamma_{ij}^2) + \delta_{b,ij}^2 + \sum_{i \neq j} \beta_{b,ij}^2) + \lambda_2^b(\beta_{b,ii}^2) + (\lambda_2^b - \frac{\lambda_1^b}{2})(\sum_{i<j}(\beta_{b,ii}\beta_{b,jj}) \\ q_{\mathfrak{g}_c} = \lambda_1^c(\sum(\beta_{c,ij}^2 + \gamma_{c,ij}^2) + \delta_{c,ij}^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_{c,ij}^2) + \lambda_2^c(\alpha_{c,ii}^2) + (\lambda_2^c - \frac{\lambda_1^c}{2})(\sum_{i<j}(\alpha_{c,ii}\alpha_{c,jj}) \end{cases}$$

Soit $\gamma \in \{a, b, c\}$. Les valeurs propres de la forme $q_{\mathfrak{g}_\gamma}$ sont

$$\mu_{1,\gamma} = \lambda_1^\gamma, \quad \mu_{2,\gamma} = \lambda_2^\gamma/2 + \lambda_1^\gamma/4, \quad \mu_{3,\gamma} = \lambda_2^\gamma \frac{r+1}{2} - \lambda_1^\gamma \frac{r-1}{4}$$

où r est l'ordre commun des matrices symétriques X_4, Y_2, Z_1. Ces valeurs propres sont respectivement de multiplicité $dim\mathfrak{g}_\gamma - r, r-1, 1$. Le signe des valeurs propres $\mu_{2,\gamma}$ et $\mu_{3,\gamma}$ est donc

$$\begin{cases} \mu_{2,\gamma} > 0 \Longleftrightarrow \lambda_2^\gamma > -\lambda_1^\gamma/2 \\ \mu_{3,\gamma} > 0 \Longleftrightarrow \lambda_2^\gamma > -\lambda_1^\gamma \frac{r-1}{2(r+1)} \end{cases}$$

On en déduit, si $s(q)$ désigne la signature de la forme quadratique q :

$$\left\{\begin{array}{lll} s(q_{\mathfrak{g}_\gamma}) & = (dim\mathfrak{g}_\gamma, 0) & \Leftrightarrow (\lambda_1^\gamma > 0,\ \lambda_2^\gamma > \lambda_1^\gamma \frac{r-1}{2(r+1)}) \\ & = (dim\mathfrak{g}_\gamma - 1, 1) & \Leftrightarrow (\lambda_1^\gamma > 0,\ -\lambda_1^\gamma/2 < \lambda_2^\gamma < \lambda_1^\gamma \frac{r-1}{2(r+1)}) \\ & = (dim\mathfrak{g}_\gamma - r, r) & \Leftrightarrow (\lambda_1^\gamma > 0,\ \lambda_2^\gamma < -\lambda_1^\gamma/2) \\ & = (r, dim\mathfrak{g}_\gamma - r) & \Leftrightarrow (\lambda_1^\gamma < 0,\ \lambda_2^\gamma > -\lambda_1^\gamma/2) \\ & = (1, dim\mathfrak{g}_\gamma - 1) & \Leftrightarrow (\lambda_1^\gamma < 0,\ \lambda_1^\gamma \frac{r-1}{2(r+1)} < \lambda_2^\gamma < -\lambda_1^\gamma/2) \\ & = (0, dim\mathfrak{g}_\gamma) & \Leftrightarrow (\lambda_1^\gamma < 0,\ \lambda_2^\gamma < \lambda_1^\gamma \frac{r-1}{2(r+1)} \end{array}\right.$$

Notons que $\mu_{2,\gamma} = \mu_{3,\gamma}$ si et seulement si $\lambda_1^\gamma = 2\lambda_2^\gamma$.

13.4.4 Classification des métriques riemanniennes adaptées sur $SO(2m)/Sp(m)$

Comme $r = \frac{m^2+m-2}{m^2+m+2}$ on a le résultat suivant

Théorème 14 *Toute métrique riemannienne sur $SO(2m)/Sp(m)$ adaptée à la structure $(\mathbb{Z}_2)^2$-symétrique est définie à partir de la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_b \oplus \mathfrak{g}_c$*

$$B = q_{\mathfrak{g}_a}(\lambda_1^a, \lambda_2^a) + q_{\mathfrak{g}_b}(\lambda_1^b, \lambda_2^b) + q_{\mathfrak{g}_b}(\lambda_1^b, \lambda_2^b)$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1^\gamma > 0 \\ \lambda_2^\gamma > \lambda_1^\gamma \frac{m^2+m-2}{2(m^2+m+2}) \end{array}\right.$$

pour tout $\gamma \in \{a, b, c\}$.

Pour une telle métrique, la connexion de Levi-Civita ne coïncide pas en général avec la connexion canonique associée à la structure $(\mathbb{Z}_2)^2$-symétrique ([5]). Ces deux connexions sont les mêmes si et seulement si la mt́rique riemannienne est naturellement réductive. Elle correspond donc à la restriction de la forme de Killing (au signe près) de $SO(2m)$. Cette métrique correspond à la forme bilinéaire B définie par les paramètres

$$\lambda_1^a = \lambda_1^b = \lambda_1^c = 2\lambda_2^a = 2\lambda_2^b = 2\lambda_2^c.$$

13.4.5 Classification des métriques lorentziennes adaptées sur l'espace $SO(2m)/Sp(m)$

Les métriques lorentziennes adaptées à la structure $(\mathbb{Z}_2)^2$-symétrique sont définies par les formes bilinéaires B, définies dans la section précédente, dont la signature est $(dim(\mathfrak{g}_a) + dim(\mathfrak{g}_b) + dim(\mathfrak{g}_c) - 1, 1)$. On a donc

Théorème 15 *Toute métrique lorentzienne sur $SO(2m)/Sp(m)$ adaptée à la structure $(\mathbb{Z}_2)^2$-symétrique est définie par l'une des formes bilinéaires*

$$B = q_{\mathfrak{g}_a}(\lambda_1^a, \lambda_2^a) + q_{\mathfrak{g}_b}(\lambda_1^b, \lambda_2^b) + q_{\mathfrak{g}_b}(\lambda_1^b, \lambda_2^b)$$

avec

$$\begin{cases} \forall \gamma \in \{a,b,c\},\ \lambda_1^\gamma > 0 \\ \exists \gamma_0 \in \{a,b,c\} \text{ tel que } -\lambda_1^{\gamma_0}/2 < \lambda_2^{\gamma_0} < \lambda_1^{\gamma_0} \frac{r-1}{2(r+1)} \\ \forall \gamma \neq \gamma_0, \quad \lambda_2^\gamma > \lambda_1^\gamma \frac{r-1}{2(r+1)}. \end{cases}$$

References

[1] Ancochea Bermudez J.M., Goze M., Le rang du système linéaire des racines d'une algèbre de Lie résoluble rigide. *Comm. in Algebra* **20**, (1992), 875-887.

[2] Ancochea Bermudez, J. M.; Goze, M. On the nonrationality of rigid Lie algebras. Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), no. 9, 2611–2618.

[3] Ancochea Bermudez J.M., Campoamor Stursberg R., On the cohomology of Frobeniusian model Lie algebras. Forum Math. 16 (2004), no. 2, 249–262.

[4] Bahturin Y., Goze M., $Z_2 \times Z_2-$symmetric spaces. A paraitre dans Pacific Journal (2008)

[5] Bouyakoub A., Goze M., Remm E. On Riemannian nonsymmetric spaces and flag manifolds. Preprint Mulhouse (2006).

[6] Berger M., Les espaces symétriques non compacts, Ann.E.N.S. **74**, 2, (1957), 85-177.

[7] Besnoit Y., Une variété non affine. Journal of Diff Geometry, 41 (1995), no. 1, 21–52.

[8] Burde D., Dekimpe K., Deschamps S., LR-algebras. arXiv:0801.1280

[9] Garca Vergnolle L., Sur les algèbres de Lie quasi-filiformes admettant un tore de dérivations. Manuscripta Math. 124 (2007), no. 4, 489-505.

[10] Garcia-Vergnolle L., Remm E., Complex structure on quasi-filiform Lie algebras. Preprint Mulhouse 2008.

[11] Cavalcanti, G., Gualtieri M.,Generalized complex structures on nilmanifolds. *J. Symplectic Geom.* 2 (2004), no. 3, 393–410.

[12] Gerstenhaber M., The cohomology structure of an associative ring, *Ann of math.* **78**, 2, (1963), 267-288.

[13] Gómez, J. R.; Jiménez-Merchan, A. Naturally graded quasi-filiform Lie algebras. J. Algebra 256 (2002), no. 1, 211–228.

[14] Goze, Michel Perturbations of Lie algebra structures. Deformation theory of algebras and structures and applications (Il Ciocco, 1986), 265–355, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 247, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988.

[15] Goze, Michel Modèles d'algèbres de Lie frobeniusiennes. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 293 (1981), no. 8, 425–427.

[16] Goze, Michel Algèbres de Lie modèles et déformations. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292 (1981), no. 17, 813–815.

[17] Goze M., Ancochea Bermudez J.M., On the classification of rigid Lie algebras. *Journal of Algebra*, **Vol.245**, (2001), 68-91.

[18] Goze M. Khakimdjanov Y., Nilpotent Lie Algebras. Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publisher.

[19] Goze M., Remm E., Lie-admissible algebras and operads. *Journal of Algebra* **273/1** (2004), 129-152.

[20] Goze M., Remm E., Valued deformations. *Journal of Algebra and its Applications*, **Vol.3**, 4, (2004), 1-21.

[21] Goze M., Remm E., Affine structures on abelian Lie groups. Linear Algebra Appl. 360 (2003), 215–230.

[22] Goze M., Remm E., Non Existence of complex structures on filiform Lie algebras. *Comm in Algebra.*

[23] Inönü E., Wigner P., On the contraction of Groups and Their representations. PNAS 39, (1953). 510-524

[24] Lutz R., Goze M., Non Standard Analysis. A practical guide with applications. Lecture Notes in math 981, Springer Verlag 1981.

[25] Markl M., Remm E., Algebras with one operation including Poisson and other Lie-admissible algebras, *Journal of Algebra*, **299/1** (2006), 171-189.

[26] Remm E., Opérades Lie-admissibles. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 334 (2002), no. 12, 1047–105

[27] Salamon S., Complex structures on nilpotent Lie algebras . *J Pure Appl Algebra,*